

मराठी

माध्यमिक त्रिकोणमिति

(Intermediate Trigonometry)

M 59
THO
लेखक

पद्मवन्त दिनाथक डोसर, एम्. एस्.सी.

प्राध्यापक, विज्ञान महाविद्यालय, नागपुर.

मल्लिक-पायादक

मीलकण्ठ भावात्री शास्त्री, एम्. एस्.सी. (लंदन)

प्राध्यापक, महाहोदय महाविद्यालय, जयपुर

FOREWORD

Convinced of the educational and national value of the use of Indian Languages in Indian Universities, the Academic Council of Nagpur University, on 12th September, 1946, resolved that Hindi and Marathi shall be the media of instruction in the University for the Intermediate courses in Arts and Science from the academic year 1949-50 and for the courses for the B.A. and B.Sc., from the academic year 1951-52. And from the same dates English shall cease to be the medium of instruction in the University.

While co-operating wholeheartedly in the prolonged All India deliberations for the long-range planning for introduction of Indian languages as media of instruction, Nagpur University has—except as regards postponement of the scheme in respect of the science courses for one year—stuck to its schedule, endeavouring, with all its limitations, to surmount the imme-

date practical difficulties in carrying through a linguistic transition of this magnitude

2 These difficulties are, in the main, the three T's of Terms, Text-books and Teachers

Thanks to the timely initiative and generous support of its Government, it was possible for the State of Madhya Pradesh to obtain the services of Dr Raghu Vira of the International Academy of Indian Culture of Lahore and to entrust him with the formidable but foundational task of coining and adapting the technical terms of science for the needs of the new linguistic media Dr Raghu Vira, who had already devoted a considerable part of his life to a scientific approach to the problem of technical terms has proceeded to his task on the basic principle of *allied words for allied ideas*, derived from the Sanskrit roots He has reduced the problem of coining terms almost to an art, an art as fine as it is useful

3 These terms have been coined and adapted in close collaboration with a band of experienced and enthusiastic teachers of science deputed by the State Government at the same time to prepare suitable text books of science

under the general direction and guidance of Dr Raghu Vira

They have so far prepared fourteen text-books each with a Hindi and a Marathi version dealing with the Intermediate Science courses in Algebra, Trigonometry, Solid Geometry, Co ordinate Geometry, Statics, Dynamics, Physics (Theory), Practical Physics, General and Inorganic Chemistry, Organic Chemistry, Practical Chemistry, Zoology, Botany (Theory) and Botany (Practical)

The manuscripts of these text-books, when received from the Government, were referred by the University to its Boards of Studies in the various subjects and, on receipt of their reports, the Academic Council decided, on 8th December, 1949, that, subject to certain specified changes, they be recommended as suitable for the Intermediate Science courses of the University

4 Finally, in accordance with a suggestion of the State Government and with the help of an appropriate Government grant, the University decided in April, 1950, to undertake the publication of these first text books prepared for its courses in science Their printing is now

in progress and seven of these—both Hindi and Marathi versions—which are required for use in the first year of the Intermediate courses are being published today

5 In the special position occupied by the Universities of the Madhya Pradesh, it has been necessary to publish these books both in Hindi and Marathi. This has added to the labour and the cost involved. At the same time it has given us a unique advantage: we have here an opportunity of piloting an educational experiment in a regional language and at the same time in the language of the Union. The interaction of the two parallel series of lectures and text books in the same University—and in many cases, in the same college—will, I am confident, prove valuable for the emergence of both Hindi and Marathi as more perfect media of higher education than they can claim to be at present.

6 As regards the change of medium for the Intermediate Arts courses, this has already been brought into force from the academic year 1949-50. The proposal for preparation and publication of text books specially designed for

the needs of the University is still under the consideration of the authorities. It was, however, thought desirable not to postpone the operation of the scheme in respect of the Arts courses as (i) the number of technical terms required for Arts is much smaller, as compared with those required for Science; and (ii) a certain number of text-books of the Intermediate Arts standard are already available, both for Hindi and Marathi. For certain subjects, glossaries of technical terms which will serve the preliminary needs of the teachers and the students have also been prepared by the University Boards of Studies. It is further hoped that it would soon be possible to adopt a scheme for preparation of text-books for Arts subjects also.

7. At the transitional stage, the problem of teachers adequately qualified to give instruction through the Indian languages presents another hurdle. For reasons, both historical and geographical, the colleges of Madhya Pradesh have been fortunate in having on their staff teachers who, between themselves, can claim almost all the principal spoken languages of India as their mother-tongues. At the present stage,

however, this creates an immediate difficulty in re-organizing the teaching arrangements on the new basis. The University is, however, confident that, where necessary, the teachers will avail themselves of the existing opportunities of acquiring a fairly good knowledge of the language of the Union or a language of their region and that the teachers and the management will, between themselves, so arrange the teaching programmes of colleges that the transition to the new media is made both smooth and effective.

No formal test for imparting instruction through the new media has accordingly been prescribed by the University.

8 The final shape of the cultural media of the new India will, after all, be moulded by that intellectual commerce between the teacher and the taught which we call University education. The scheme of Nagpur University leaves the choice as between the Sanskritic technical terms and their equivalents to the teachers and the students themselves. The text-books being published under the scheme give the new Sanskritic technical terms as well as their English equi-

valents and both teachers and students are, at the present stage, permitted to use either of them according to their convenience and requirements. Adoption of this course cuts across the prevailing controversy with regard to the structure of technical terms and, at the same time, gives the newly coined terms an opportunity to be judged on their own merits along with their English competitors in the academic field.

9 Progress in education requires both individual experiments and general planning, local initiative as well as central direction. It would hardly be proper to be dogmatic about their order of priority and, in the case of a great linguistic transition at the University stage, the problem requires to be attacked on all fronts. The Conference of Education Ministers and Vice Chancellors of India convened by the Ministry of Education in New Delhi in January, 1948, had recommended five years as the time limit within which Indian Universities should make the requisite preparations for commencing their instruction through the Indian languages. The Indian Universities Commission has however, wisely left the determination of the duration

of the preparatory period to the interplay of the various educational and social factors that operate in Universities. Adoption of such a course would leave each University freedom to regulate the pace of its linguistic progress according to its own needs, resources and limitations.

10 Change in the medium of instruction at different dates in different Universities no doubt gives rise to fresh problems. Each of these has, however, to be tackled by an intelligent and sympathetic administrative approach. One of these difficulties evidently relates to the migration of students from one University to another—a process which, I hope will in the national interests, receive every encouragement in the future. The difficulty in this respect, however, would not seem to be so formidable as it might appear at first sight, if we remember that (i) English text-books in each subject will be recommended along with the Hindi and Marathi text books for use of students, (ii) students and teachers will, for the present, be familiar both with the Hindi or Marathi terms and with their English equivalents, and (iii) English will continue to be a compulsory subject both for

the Intermediate and for the first degree courses in Arts and Science

The same considerations would seem to apply to the apparent difficulties in respect of All-India Competitive Examinations. With the goodwill and determination shown by the builders of the new constitution of India, there is good reason for hoping that English may soon cease to be the sole medium for the All-India Competitive Examinations. The institution of the language of the Union as the medium of instruction and examination in the Indian Universities should itself accelerate the pace of progress towards this transition.

11 I venture to hope that this series of books will prove useful not only for the State of Madhya Pradesh, but also for other States in their efforts to adopt a regional language or the language of the Indian Union as the media of instruction at the University level. The present effort is necessarily imperfect. We can write good book in Hindi and Marathi only if we can do original thinking in Hindi and Marathi, as we do in English today. Yet we can hope to do our thinking in Indian languages only when we have

Vidarbha Mahavidyalaya Amravati), working in collaboration. Some work in this direction had already been done by myself and Dr. Braj Mohan of the Hindu University Banaras. Shri. Thosar wrote out the Marathi text on the basis of the material that he had collected in English. It was next translated into Hindi by Shri R. C. Verma, M. Sc., now lecturer in Mathematics, Mahakoshal Mahavidyalaya, Jabalpur. Shri V. K. Mathur, M. A., helped Shri R. C. Verma in finalising the Hindi version. The two versions were carefully compared by Shri. Shastri, Shri. Thosar and Shri R. C. Verma. Finally the book was submitted to the Board of Studies in Mathematics of the Nagpur University which recommended the book for the Intermediate examination.

* * *

Sanskrit possesses a rich mathematical literature, which is replete with technical terms. We have made free use of these ancient terms, though very often we had to restrict the use of one term to one specific meaning only. The requirements of modern trigonometry are, however, not satisfied in their entirety by ancient terms. Hence new terms had often to be evolved. They are designed to be short, compact and significant. For a clear understanding of the terms used in the present book, I am giving hereunder short word notes which, I hope would be found useful by teachers and students alike.

त्रिकोण-मिति is a Sanskrit facsimile of the European word trigonometry. त्रि is Sanskrit त्रि for Greek *gonia* is the commonest Indian word for angle. त्रिकोण already occurs in the Mahabharata. कोणसङ्गृह of भास्कराचार्य

has been translated by Colebrooke as a 'circle in contact with the angles, an exterior circle one circumscribed

Metry is मिति 'measurement', from Sanskrit root मा to measure

अश 'numerator' and 'degree is an ancient word. Grade has to be distinguished from degree It is $\frac{1}{100}$ th part of a right angle and thus smaller than a degree which is $\frac{1}{90}$ th part of a right angle It has been translated by अशक smaller than an अश, the suffix क denoting diminution

अक्ष has been used in Indian astronomy for 'terrestrial latitude' We have used the specific word अक्षवृत्त (cf विषुवद्वृत्त equator, देशान्तरवृत्त longitude) In our terminology अक्ष has been retained for 'axis'

अधिकोण is an obtuse angle (अधि stands for अधिक i.e. an angle greater than a right angle Cf अकूकोण acute angle)

अनुपात proportion is an ancient word and is in wide use in Hindi, Bengali, Marathi and other languages अनुपाती is proportional

अनुच्छेद article is already in use in Bengali It has also been used in the Hindi version of the Indian Constitution Etymologically अनु small + छेद section

अनुरेखण 'trace' i.e., to copy by following (अनु) the lines (रेखा) is a denominative verb अनुरेखित traced

अपवत्य is used for multiple in Hindi and Bengali अपवर्तक is an ancient word in the sense of a common measure

अपवर्तन is reduction of a fraction to its lowest term

असुग्म 'odd' and सुग्म 'even' are ancient words used as early as the गृह्यसूत्रa.

अर्ह 'value' is from $\sqrt{\text{अर्ह}}$ to deserve, to merit, to be worthy of

अल्पिष्ठ least Cf भूयिष्ठ maximum Both are ancient words

आदश substitute It is well known to students of Sanskrit e.g. पाणिनि—स्थानिवादादशानल्लिखे

आद्यत 'rectangle' is an ancient word and is also in common use in Hindi, Bengali and other Indian languages

आयान 'length' is an ancient word

अर is the spoke of a wheel hence a radius From अर is derived आरadian i.e. a central angle subtended in a circle by an arc whose length is equal to the radius of the circle Radian when used as an adjective would be आरीय

आवर्तकाल, आवर्त period अ + $\sqrt{\text{वृत्}}$ to turn round

उदा is the parent of sine उदा 'sine of an arc has been used in the सूत्रमन्त्रात् 11 57 कोटिज्या 'cosine' is also from the सूत्रमन्त्रात् There it signifies the cosine of an angle in a right angled triangle

उत्क्रमकोटिज्या covered sine उत्क्रम is reversed or reversed, कोटिज्या cosine

उन्नय and उन्नय have been specifically used for altitude and height respectively Both are ancient words

उच्य is an ancient word, 'point upwards' hence 'vertical'

उपसङ्ग corollary, सङ्गत proposition A corollary is a proposition requiring no additional proof following upon one just demonstrated

उपसादन to bring near, उपसन्न brought near, approximate उपसमधारण common to both

धन positive and ऋ negative धन in the sense of an affirmative quantity or plus and ऋ in that of a negative quantity or minus are ancient words

एक unit ('a single thing, as a magnitude or number regarded as an undivided whole') It is used in this sense in Bengali (see Guha's Modern Anglo Bengali Dictionary)

ऐकान्त्य identity, from ऐक्य identical

कर्ण 'hypotenuse of a triangle' is an ancient word

कला 'minute' occurs in सूर्यसिद्धान्त and other works

काष्ठिका a second has been derived from कष्ट which is $\frac{1}{30}$ th of a कला (see Mann I 64) काष्ठिका is smaller than a शीघ्रा विकला stands for the second of a degree in सूर्यसिद्धान्त

रसशङ्का (abbreviated to रशङ्का) is tangent when it is the portion (of the straight line tangent to a curve) between the point of tangency and a given line In the sense of a tangent line or curve it is रसशरेखा or simply रशङ्का

कोशक mile In ancient literature the common कोश is of the length of 4000 दशतः i.e. 6000 feet, a दशत being $1\frac{1}{2}$ feet A mile (5280 feet) is shorter than a कोश (क is added to कोश to signify diminution)

क्षितिज 'horizon', occurs in आर्यभट and सूत्रसिद्धान्त. It is also widely used in Hindi, Bengali, Marathi, etc. क्षितिज is horizontal

क्षेत्रफल area The word is used in the गोलार्धव्यास and काल्यायन-शौनसूत्र as meaning the superficial contents of a figure. It is current in Hindi, Bengali, etc. फल is also used by आर्यभट for area of a figure. Thus स्फुटफल occurs for distinct or precise area (of a triangle, etc.).

शान 'power', is widely used in Hindi. It is an ancient word. It is from $\sqrt{\text{इन्}}$ to multiply.

चरण quadrant It is an ancient word and signifies a fourth part.

चाप 'arc' is from सूत्रसिद्धान्त

छेदा logarithm According to ननिचन्द्र the Jain author of विनोदसार if $x = 2^n$ then n is called the अर्धच्छेद of x . छेद is the number of times a particular number can be divided by a base. If $64 = 4^3$ then 3 represents the number of times that 64 can be divided by 4. Literally छेद is cutting and the number of times that the division can take place is छेदसरया or simply छेदा. In $64 = 4^3$, 3 is the log of 64 to the base 4. दशच्छेदा common logarithm; दशच्छेदापद्धति common system of logarithms, i.e., logarithms having 10 for their base. Its complete translation would be दशाधारछेदा. For brevity दशच्छेदा has been used instead.

द्विभुज त्रिभुज isosceles triangle Latin isosceles is from Greek isoskeles, isos equal + skelos leg. In geometry it is a triangle having two equal sides. It is a significant but unintelligible word. द्विभुज त्रिभुज is in comparison

simplicity itself. It is a त्रिभुज three-sided figure, द्विद्वो of the sides being सम equal.

द्विघात समीकार quadratic equation. Quadratic is an adjective from quadrate 'square'. In a quadratic equation समीकार the highest power घात of the unknown quantity is a square द्वि.

दशमिक decimal. दशमद्वय is widely used in Hindi for decimal. Here is visible an attempt to have a phonetic approximation to the English word. But द्वय meaning a part is not required after दशम, as दशम itself means the tenth part. Decimal is derived from L. *decimus*, 'tenth' from *decem* 'ten' + *-al*, of which the exact Indian equivalent will be दशमिक (दशम tenth + इक). In Bengali दशमिक is already current (see Guha's Modern Anglo Bengali Dictionary).

दशमिकांश mantissa. This word is believed to be of Etruscan origin. The Indian word is crystal clear while the English word is perfectly opaque. In Latin it meant an addition, make-weight. It has gone out of use in general English where it meant an addition of little value. In mathematics it denotes the decimal दशमिक part अंश of a common logarithm.

ध्रुव pole. ध्रुव in the एश्टदिग्वन्त signifies a celestial pole. It is widely used in all important Indian languages.

ध्रुवरेख meridian. Meridian is a great circle रेख on the surface of the earth, passing through the poles ध्रुव and any given place. ध्रुवरेख is short for ध्रुवान्तर्गामी रेख

निर्मेय problem. A problem is a proposition requiring an operation to be performed or a construction निर्माण to be made. Laterally निर्मेय is that which is to be

constructed Cf प्रमेय theorem

निराति 'ratio' is used not only in Hindi but in Bengali and elsewhere (e.g., see the Modern Anglo Bengali Dictionary by Charuchandra Guha)

न्यास for data is widely used in our astronomical literature Etymologically it is that which has been put down नि+कृत् to serve as a basis for mathematical investigation Literally data or its singular datum would be दत्त 'given'

न्यूनकोण acute angle It is less than a right angle
Cf अधिकोण obtuse angle

परि circum परि as a prefix implies round, around, about
Circum is used adverbially to signify around, about, on all sides Cf परिनेन्द्र circumcenter, परित्रिज्या circumradius, परिलिखन circumscribe, परिवृत्त circumcircle

परिमाप perimeter, the whole outer boundary or measure माप of a body or figure

पाद foot पाद and पाद both mean foot The English word is historically a descendant of the Sanskrit word As a measure पाद has been used in the शतपथब्राह्मण, in the श्रौतसूत्रs and elsewhere Like all other measures in ancient times it must have varied slightly from place to place There are two measurements given for पाद one is 12 अंगुलs and the other is 15 अंगुलs (कात्यायनश्रौतसूत्र) The second measurement is approximately 11½" In modern times the foot is a fixed measurement of 12 inches It was used extensively for measuring land On the European Continent, the foot, now largely replaced by metric units, varies locally between 11 and 14 inches It is interesting to note that as in India the पाद was subdivided

into 12 angulas so in the English system also the foot is subdivided into 12 parts, the inches. Only an inch is slightly bigger than an अंगुल (and hence our word प्रांगुल for inch). An inch was originally divided into three parts called barley corns, whose length was declared by a statute apparently of 17 Edw II given in the Cottonian Manuscripts (Claudian D 2) to be that of three grains of barley, dry and round, placed end to end lengthwise.

पादाक्ष suffix. It is an अक्ष or figure at the foot. Suffix or sub index is a character affixed below to a symbol, to distinguish it in its class. Cf. **मूर्ति** superscript.

पूर्व integer. The Indian term is quite clear in its meaning and is more readily intelligible than its English equivalent. **पूर्व** for integer, is used in Hindi, Bengali, etc.

प्रत्य common difference. It is an ancient word.

प्रति stands for anti. **प्रति घटीवृत्त** is anti clockwise from घटीवृत्त clockwise. **वामारत** and **दक्षिणवर्त** are ancient words and can be used as alternatives.

प्रतिबन्ध condition. Condition is that which limits or modifies the existence or character of something; a restriction or qualification. The word is used in Hindi.

प्रतीक symbol occurs as early as the छन्दोग्य उपनिषद्.

प्रतीव inverse, literally 'against प्रति the stream अप्.

प्रथम principle. **प्रथमः=प्रथमप्रथम**. Principle is a comprehensive law or doctrine from which others are derived or on which others are founded, an elementary proposition or fundamental assumption. The use of प्र in the sense of first is well-known. Cf. **मृति** the original or

primitive substance. प्रथम (प्र+थम) itself is a superlative of प्र.

प्रमेय for theorem is in use in several languages. Guba's Anglo-Bengali Dictionary gives प्रमेययोग. प्रमेय is that which is to be established by प्रमाण or proof. Cf. निर्मेय problem.

प्रांशुन inch (see under पाद foot).

फल 'result' is from परिनिष्पन्न (the result of a calculation, product or quotient, etc.).

बहिर्वर्त्तन e crite. बहिर्वर्त्तित escribed. बहिर्वर्त्तन is to write (or draw) externally. एस्क्रिबे is to draw (a circle) touching one side of a triangle externally. बहिर्वृत्त excircle, बहिर्व्येग exterior angle, बहिर्वेन्द्र excentre.

चिन्हरेख graph. चिन्हरेख is literally dots and lines. A graph is a diagram symbolising a system of interrelations by spots (चिन्ह), all distinguishable from one another and some connected by lines (रेख) of the same kind.

विभ्र 'diso' is an ancient word.

भागफल quotient. Quotient is literally 'how many times'. It is the number resulting फल from the division भाग of one number by another. भागफल is current in Hindi and Bengali. लीलावती gives फल, which we have already retained for result in general. Other ancient words for quotient are भाग, कृत्रि, अप्त, आसि, अवाम्, अशसि, लब्ध

भिन्न 'fraction' is from लीलावती. It is widely used in ancient Indian mathematics; some of its compounds are भिन्न-संक्लन addition of fractions, भिन्न-गुणन multiplication of fractions, भिन्न घन the cube of a fraction, भिन्न भाग हर division of fractions (लीलावती).

सुग meaning the side of any geometrical figure has been used as early as कात्यायन श्रौतसूत्र

नियरेडन intersect Intersect is to cut छेद into one another मिय

यथा exact Of सुतस्य precise, शुद्ध correct, परिशुद्ध accurate

योग 'addition is from स्यसिद्धान्त Of वियोग 'subtraction' from गणिताध्याय

राशि 'quantity, an ancient word, is current in Hindi, Bengali, etc

रैखिकी geometry रेखगणित is in common use रैखिकी is short for रैखिकी विद्या the science pertaining to lines or the science of lines Similarly प्राणिकी=प्राणिरी विद्या zoology, औद्भिरी=अद्भिरी विद्या botany

Naming of sciences was as varied in ancient days, as it is today in the European languages Sometimes abstract nouns were used as परचित्तरता Chemistry, surgery are European examples of abstract nouns as names of sciences In the names of arts and crafts, some word denotative thereof was suffixed—मधुच्छिद्यकृत् wax modelling (मधुच्छिद्य wax) मृत्नीकन needle work, मणिमूर्धिराकन gem mosaic work Sometimes the word denotative of art and craft was left out as in मणिराग colouring of precious stones The general action noun वरण has been used in शुक्लनिर्वास in धातु साक्य पार्थिव्य करणम् the art of combination and isolation of minerals

कर्म standing for art was sometimes dropped particularly where the preceding word was itself a compound It was usual to transfer the neuter gender of कर्म to

the compound which was a sort of adjective made to serve as a noun. We have a beautiful example in the ममसाययन्त्र, ११०, उदकमृत्तिका. The use of adjectives for naming sciences also became common, e.g., सारयन्त्र, वैशेषिकम्, पन्द्र चादिकम्.

As for arts and crafts the general term कर्म was a neuter noun, so for different branches of knowledge there was the general term विज्ञानम्. शुक्रनीतिर mentions धरादानीं सुयोग पूर्वविज्ञानम् 'knowledge of new combinations of minerals', and श्यवपत्रादिकरयिदायाम् 'knowledge of making glass utensils'.

From the most ancient times we read of numerous विद्याs or sciences. The परा and अपरा विद्या of the उपनिषद्स are well known. Again, adjectival forms with feminine endings, originally intended to be followed by विद्या, have been used in the same way as the neuter उदकमृत्तिका. मायसी thus is the science of the mind. त्रयी, दार्शन, अन्वीक्षिका are well known from the अवशास of Kautilya. रमचन्द्र in his commentary on the first verse of हस्तमङ्गलि, a continuation of चम्पूरामरण of विदभरत, mentions two sciences अदृश्यरणी and दूररणी. The commentators of श्रीमद्भागवत, such as श्रीधर, record वनविही विद्या, वनविही विद्या, व्यायामिनी विद्या, वैतादिकी विद्या.

The adjectival suffix *ic* in English (ultimately derived from Skt *इक* through Greek *ikos*, Latin *icus* and French *ique*) has been similarly used. Greek or Latin nouns that were originally adjectives used substantively have been adopted into English, as arithmetic, music, logic, etc. Since 1600 A.D. the

plural form *ies* has been used instead to denote names of sciences as in physics, mathematics, politics, athletics, economics. This was probably in imitation of the Greek *ta physika*, *ta ethika*. It is further interesting to note that these plural forms are now construed as singular. In French and German the singular is still used in the names of sciences, e.g., *die Physik*, *die Politik* in German and *la physique*, *la politique* in French.

लम्ब 'perpendicular' is an ancient word. Other words used in ancient works are अटम्ब (निरावर्ती), अवलम्बक, अधो रम्ब, आलम्ब, वलम्ब, कोटि (the perpendicular side of a right angled triangle, स्थितिदन्त). Compounds from लम्ब are समलम्ब having equal perpendicular, अन्तर्लम्ब a triangle in which the perpendicular falls within, etc.

लम्बकद्र orthocentre. Orthocentre is the common intersection of the three altitudes of a triangle, or of the four altitudes of a tetrahedron provided these latter meet in a point.

लम्ब कोण right angle i.e., the angle कोण made by a perpendicular लम्ब. In Hindi and Bengali समकोण is sometimes used for a right angle. It is not a happy word because सम means equal.

लम्ब पूर (कोण) complementary (angle) लवपूर is short for लम्बकोण पूरक that which completes पूरक a right angle लम्बकोण वज्र 'curse' is an ancient word.

वर्ग square, वर्गमूल square root. In ancient usage वर्ग is the square of a number, e.g., पञ्चम वर्ग square of five मित्रवर्ग square of a fraction वर्ग and वर्गमूल are widely current in Hindi, Bengali, Marathi, etc.

घुंल 'circular' is an ancient word It is from $\sqrt{\text{घृ}} + \text{ल}$ to turn, to revolve Cf. घृत् a circle

विशोणमान theodolite Theodolite is an instrument for measuring horizontal and usually also vertical angles विशोणमान is literally an instrument which measures मान angles कोण of various kinds वि, नि being short for विविध

विश diagonal In ancient mathematics कर्ण has been used for hypo'tenuse and diagonal both कर्ण has been retained by us for hypotenuse, while the specificatory prefix वि (here short for विश) has been added to कर्ण to designate a diagonal

वियुत minus It is from घृत् + मिहन्त

वियोग 'subtraction' is from गणित-व्याय Cf योग addition.

विषम 'odd, is from इष्यतक of वराहमिहिर Also current in Hindi, Marathi, Bengali, etc

वैकल्पिक 'alternative' is an ancient word It is used in Hindi, Bengali, etc

व्यञ्जक expression is the current Marathi word and is also an ancient usage

व्यास 'diameter is from Vedic शुक्लस्य

व्युत्क्रम reciprocal It is an ancient word meaning inverted order, so is the reciprocal of a function In Latin 'reciprocal' is turning backward and forward

वृत् 'circle is from गणित-व्याय It is current in many Indian languages

शकल sector (part of a circle) शकल means a fragment, piece or bit In वाद-मयी of Bṛha occurs the expression चन्द्र-शकल

शतक centesimal शतक 'hundredth' occurs in ब्राह्मिहिरस
वृहत्संहिता

शतमान centimeter Meter is from Latin *mensus* to
measure, akin to Greek *metron* a measure, ultimately from
Sanskrit म् to measure In English meter has two senses
(1) That which measures, an instrument or an apparatus,
e g, barometer, thermometer In this sense it is usually
a suffix (2) A unit of length Its Indian counterpart is
मान As a suffix it has been used in यपमान (वैद्य अथशास्त्र)
an instrument for measuring rainfall When standing by
itself it has been used as a general word expressing
measure as well as particular measures e g according
to the commentator of तैत्तिरीयसंहिता and कात्यायन धौतयत्र
100 मानs make 5 पदs or पगs.

The word मान can be made to cover both the usages
of meter viz (1) मान, me or, as the unit of length, and
(2) मान as a suffix denoting a measuring instrument, e g,
तापमान thermometer

Meter is subdivided into decimeter, centimeter, milli-
meter etc Their Indian equivalents would be दशमान,
शतमान, सदशमान, etc Similarly for decameter hectometer,
kilometer, etc, which are its multiples the Indian
equivalents would be दशमान, शतमान, सदशमान, etc (For the
complete series see our tables of Weights and Measures,
appended to the Great English Indian Dictionary)

शिरोदण्ड or शिरोवार bar=vinculum शिरोदण्ड or शिरोवार
the bar at the top Vinculum is a straight horizontal
mark placed over two or more members of a compound.

शिरोबिंदु vertex In any figure having a base it is the point बिंदु opposite to and farthest from, the base, the top शिरस

शून्य zero It occurs in such works as गणिताध्यय and दराहनिहिरः वृहत्संहिता From it are derived Gk *lenos*, *lencos*, *lennos*, etc That the conception of zero is essentially Indian is now well known According to the Encyclopaedia Britannica, the Sanskrit term शून्य passed into Arabic as *as-sifr*, from which are derived Italian, French and English *zero*

श्रित function This term is used mostly to point out dependance on some certain variable or variables' Mathematics Dictionary by Glenn James and R O James It is the past participle form from √श्रि to depend on, आश्रय is from the same root

श्रेणी 'progression' is an ancient word meaning a particular numerical notation or progression of figures

षष्ठ्यः sextant Sextant is the sixth part of a circle It occurs as early as पाणिनि

षष्टिकः sexagesimal meaning pertaining to or founded on the number sixty षष्टिक is the adjectival form of षष्टि sixty

सर्वापारकाणः radian Radian is an angle कोण subtended by an arc चाप equal स in length to the radius अर

संपतन or सशत coincidence The English word is derived from Latin *coincidere*, from *co* + *incidere* to fall on संपतन=स together + पतन falling

सवादी 'corresponding' is an ancient word (e g in वाग्वादः) Literally it means conversing with, hence agree

ing or harmonizing with The English word 'correspond' (com- + respond) etymologically means 'to answer to' from which are derived its figurative senses 'to answer in fitness, character, function, amount'

संस्पर्श contact Contact is from Latin *con-tactus* to touch on all sides. संस्पर्श = स mutual, close + स्पर्श touch.

सत्यापन 'verification' is an ancient word. The verbal form is सत्यापयति verifies.

सदिश vector. Vector (from Latin *where, vector* to carry) is a complex entity representative of a directed magnitude. सदिश means 'having a direction दिश'. Our word is clearer and will be more easily understood by the Indian students.

समांग homogeneous, uniform. Homogeneous is alike in nature and therefore, comparable in parts (सम alike + अंग parts)

समान्तर श्रेढी arithmetic progression गुणोत्तर श्रेढी geometric progression. Arithmetic progression—a progression श्रेढी whose elements progress by a constant (सम same) difference अन्तर (positive or negative) as 1, 3, 5, 7 or $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d$. 'Arithmetic progression' is not a very intelligible expression Geometric progression is 'that in which elements progress by a constant factor, as 1, 2, 4, 8, 16, any term is obtained by multiplying the preceding one by the constant factor'. गुणोत्तर श्रेढी— गुण multiplication उत्तर successive, श्रेढी progression.

सरलन simplify. सरलन is a nominal verb (नामधातु) from सरल simple

समावृत्त congruent मव गहन (सर्व+भग+सम) equal in all parts Congruent is from Latin to come together coincide agree In geometry it means superposable so as to be coincident throughout For us समावृत्त is simpler and more expressive than congruent

साधन throughout साधन(स with+आदि beginning+अन् end) It is prevalent in this sense in Hindi and Marathi

सानि The Latin prefix *semi* akin to Greek *hemi* is related to Sanskrit सानि It is combined chiefly with adjectives and nouns meaning half Cf semiperimeter सानि परिमाप

सारणी table सारणी is from √सृ to run the word originally means a running stream. Table signifies any collection and arrangement (generally in parallel columns) in a condensed form for ready reference of many particulars or value as of weight measures, &c सारणी covers the meaning of the word table as implied by its running character The word is in common use among the astronomers of India

समावृत्त square (figure) समावृत्त is an आयन or rectangle with all the sides सम or equal In Hindi वग is used to denote a square figure as well as the product of a number or quantity multiplied by itself We have retained वग for the latter sense and समावृत्त for the former

सीमन्त in the limit सीमान्त is the Sanskrit locative singular form from सीमन् limit In Hindi it can also be expressed by सीमांत पर

स्पर्शदा tangent is short for स्पर्शज्या

स्थिर constant is a magnitude that is supposed not to change its value in a certain discussion or stage of

investigation The adding of अङ्ग to स्थिर makes the Indian word clearer

हर 'denominator' is an ancient word It is derived from √ हृ to take away, i e to divide

* * *

During the course of last three years, I have had the privilege of enjoying the kind sympathy of the Hon ble Pt Ravi Shankar Shukla the Chief Minister of Madhya Pradesh To the Hon ble D K Mehta, my debt of gratitude is immense It is he who, as the Finance Minister of the State, set the ball rolling The Hon ble Pandit Dwarka Prasad Mishra with his unbounded love for Hindi has been taking personal interest and has gone so far as to establish a special department for the purpose of establishing Hindi and Marathi as the languages of this State To Lt Col N Ganguli, the Education Secretary in 1947-48 and his successor Dr V S Jha, I am indebted, for giving top priority to my requirements Since the establishment of the Languages Department in January, 1950, Shri A R Deshpande, the Under Secretary, has been extending to me his wholehearted cooperation

My very special thanks are due to Lt Col Kunjilal Dubey, the Vice Chancellor of the Nagpur University It is due to his love for Hindi and Marathi that the Nagpur University is leading India in the matter of introducing Hindi and Marathi as the media of instruction It was again due to him that the Nagpur University

has taken the heavy responsibility upon itself of publishing the text books that were prepared under the orders of the Government of Madhya Pradesh

Lastly my thanks are due to my colleagues, the authors of the text books, who have been with me for the last three years. They have worked devotedly, fully convinced of the service that they are rendering to the nation. They have considered their work to be their reward.

Raghu Vira

The title page, preface and introduction have been printed at the Aryabharati Press, Nagpur.

प्रस्तावना

मध्यप्रदेश सरकारच्या सूचनेप्रमाणे मी प्रस्तुत पुस्तक लिहायचास घेतले. या पुस्तकांत वापरलेले पारिभाषिक शब्द आचार्य डॉ. रघुवीर यांनी दिले आहेत. त्यांनी सतत दिलेल्या उत्तेजनामुळेच हे पुस्तक अशा रूपांत लिहिले गेले. पुस्तक शक्य तितके निर्दोष आणि परिपूर्ण करण्याचा प्रयत्न केला आहे. टिकटिकाणी नमुन्यादाखल उदाहरणे साडविली आहेत व शक्य असेल तेथे प्रमेये व उदाहरणे यांकरिता अन्य रीती दिव्या आहेत. म्हणून हे पुस्तक विद्यार्थ्यांना विशेष उपयुक्त वाटेल असा भरवसा वाटतो.

जयलपूरच्या महाकौशल महाविद्यालयांतील गणिताचे प्राध्यापक श्री. नी. धा. शास्त्री यांनी घेळोवेळी उपयुक्त सूचना केल्या याबद्दल मी त्यांचा आभारी आहे. तसेच, श्री. वी. के. पराडकर एम्. एस्सी. यांनी कांही उदाहरणे जमाविण्यात मदत केली, डॉ. वि. भि. कोलते यांनी हे पुस्तक भाषेच्या दृष्टीने वाचून पाहिले आणि श्री. रमेशचंद्र चर्मा एम्. एस्सी. यांनी या पुस्तकाचा हिंदीमध्ये अनुवाद केला याबद्दल मी या सर्वांचा आभारी आहे.

अनुक्रमणिका

प्रकरण	पृष्ठ
Foreword	1-10
Introduction	11-30
प्रस्तावना	31
१ त्रिकोणमितीतील महत्वाची सूत्रे व कलं. कोणमापन. पाष्ठिक आणि शक्तिक मापे. चतुर्ल अथवा भारीय माप.	३-१० ११-२४
२ न्यूनकोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती. व्युत्क्रम संबंध. मूलभूत षेकात्म्य.	२५-४०
३ कांही प्रमाण कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती. 0° , ९०° , ४५° , ६०° व ३०° यांच्या निष्पत्ती. ज्या अ < ग < स्प अ सी $\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}}$ आणि सी $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$	४१-६१
४ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींची विचरणे. निष्पत्तीमधील बदल दाखविणारे विदुरेख.	६२-७७
५ कोणत्याहि कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती.	

- अ च्या निष्पत्तीच्या रूपांत -अ,
९०°-अ, ९०°+अ, १८०°-अ, १८०°+अ
यांच्या निष्पत्ती. ७८-१८
- ६ दिलेली त्रिकोणमितीय निष्पत्ती अस-
णाऱ्या सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहति.
सुलभ त्रिकोणमितीय समीकार. ९९-११४
- ७ योग आणि वियोग प्रमेय.
गुणनसूत्र. ११५-१४०
- ८ अपवर्त्य आणि अपवर्तक कोणांच्या
त्रिकोणमितीय निष्पत्ती.
१८° व ३६° यांच्या निष्पत्ती. १४१-१६४
- ९ ऐकात्म्ये व त्रिकोणमितीय समीकार. १६५-१८१
- १० त्रिकोणाच्या भुजा व कोण यांमधील
संबंध. १८२-२०२
- ११ त्रिकोणाचे गुणधर्म.
त्रिकोणाशी संबंध असलेली वृत्ते.
लंबकेन्द्र व पदिक त्रिकोण. मध्यका.
कोणांचे द्विभाजक. २०३-२४०
- १२ वृत्तीय चौकोण. नियमित बहुभुज.
कोणत्याहि वृत्ताचे क्षेत्रफळ. २४१-२५१
- १३ छेद. २५२-२७४

१४	त्रिकोणांचे निर्धारण. लंबकोणत्रिकोणांचे निर्धारण. कोणत्याहि त्रिकोणाचें निर्धारण. संदिग्ध प्रकार.	२७५-३१३
१५	उंची आणि अंतरें.	३१४-३२४
१६	प्रतीप चतुर्ल द्युतें. उत्तरें. पातिभाषिक शब्दावलि छेदा व प्रतिच्छेदा यांच्या निदर्शनात्मक सारण्य, शुद्धिपत्र.	३२५-३३३ ३३४-३४७ ३४८-३५९ ३६२-३६५ ३६६-३६७

समतल

त्रिकोणमिति

त्रिकोणमितीतील महत्वाचे सूत्रे व फलं

(important formulae and results in trigonometry)

$$१. \text{ वृत्ताचा परिघ} = २ \text{ प्यात्र}$$

$$\text{प्या} = ३.१४१५९ \dots\dots\dots$$

$$= \frac{२२}{७} \text{ जवळजवळ}$$

$$\frac{१}{\text{प्या}} = ०.३१८३१ \dots\dots\dots$$

$$१ \text{ आर} = ५७^{\circ}.१७' ४४.८'' \text{ जवळजवळ}$$

$$१ \text{ लंबकोण} = ९०^{\circ} = १००^{\text{भ}} = \frac{\text{प्या}}{२} \text{ आर}$$

$$\text{कोणाचे आरीत्र माप} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$२. \text{ व्युज्या भ} = \frac{१}{\text{ज्या भ}}$$

$$\text{व्युत्कोज्या भ} = \frac{१}{\text{कोज्या भ}}$$

$$\text{कोरप भ} = \frac{१}{\text{रप भ}}$$

$$\text{ज्या}^2 \text{अ} + \text{कोज्या}^2 \text{अ} = 1$$

$$\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{अ} = 1 + \text{स्प}^2 \text{अ}$$

$$\text{व्युज्या}^2 \text{अ} = 1 + \text{कोस्प}^2 \text{अ}$$

$$\text{स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}},$$

$$३. \quad \text{ज्या } 0^\circ = 0, \text{ कोज्या } 0^\circ = 1, \text{ स्प } 0^\circ = 0$$

$$\text{ज्या } ३०^\circ = \frac{१}{२}, \text{ कोज्या } ३०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}, \text{ स्प } ३०^\circ = \frac{१}{\sqrt{३}}$$

$$\text{ज्या } ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}, \text{ कोज्या } ४५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}}, \text{ स्प } ४५^\circ = १$$

$$\text{ज्या } ६०^\circ = \frac{\sqrt{३}}{२}, \text{ कोज्या } ६०^\circ = \frac{१}{२}, \text{ स्प } ६०^\circ = \sqrt{३}$$

$$\text{ज्या } ९०^\circ = १, \text{ कोज्या } ९०^\circ = ०, \text{ स्प } ९०^\circ = \infty$$

$$\text{ज्या } १५^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}, \text{ कोज्या } १५^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}},$$

$$\text{स्प } १५^\circ = २ - \sqrt{३}$$

$$\text{ज्या } ७५^\circ = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}, \text{ कोज्या } ७५^\circ = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}$$

$$\text{स्प } ७५^\circ = २ + \sqrt{३}$$

$$\text{ज्या } 14^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{4}-1), \text{ कोज्या } 36^\circ = \frac{1}{2}(\sqrt{4}+1),$$

$$\text{सी } \frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}} = 1, \text{ सी कोज्या अ} = 1, \text{ सी } \frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}} = 1$$

अ $\rightarrow 0$ अ $\rightarrow 0$ अ $\rightarrow 0$

४. ज्या $(-अ) = -\text{ज्या अ}$, कोज्या $(-अ) = \text{कोज्या अ}$

ज्या $(90^\circ - अ) = \text{कोज्या अ}$,

कोज्या $(90^\circ - अ) = \text{ज्या अ}$

ज्या $(90^\circ + अ) = \text{कोज्या अ}$,

कोज्या $(90^\circ + अ) = -\text{ज्या अ}$

ज्या $(180^\circ - अ) = \text{ज्या अ}$,

कोज्या $(180^\circ - अ) = -\text{कोज्या अ}$

ज्या $(180^\circ + अ) = -\text{ज्या अ}$,

कोज्या $(180^\circ + अ) = -\text{कोज्या अ}$

५. जर ज्या अ = ज्या इ, तर अ = स प्या $\pm (-1)^{\frac{1}{2}}$ इ

जर कोज्या अ = कोज्या इ, तर अ = स प्या \pm इ

जर स्प अ = स्प इ, तर अ = स प्या + इ

६. ज्या $(क + ख)$

= ज्या क कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क + ख)

= कोज्या क कोज्या ख - ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प (क + ख)} = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{1 - \text{स्प क स्प ख}}$$

ज्या (क - ख)

= ज्या क कोज्या ख - कोज्या क ज्या ख

कोज्या (क - ख)

= कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख

$$\text{स्प (क - ख)} = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{1 + \text{स्प क} \times \text{स्प ख}}$$

७. $2 \text{ ज्या क कोज्या ख} = \text{ज्या (क + ख)} + \text{ज्या (क - ख)}$

$2 \text{ कोज्या क ज्या ख} = \text{ज्या (क + ख)} - \text{ज्या (क - ख)}$

$2 \text{ कोज्या क कोज्या ख} = \text{कोज्या (क + ख)} + \text{कोज्या (क - ख)}$

११ $2 \text{ ज्या क ज्या ख} = \text{कोज्या (क - ख)} - \text{कोज्या (क + ख)}$

$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{2}$

$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = 2 \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{2} \text{ ज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{2}$

$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = 2 \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} + \text{घ}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग} - \text{घ}}{2}$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २ज्या \frac{ग+घ}{२} ज्या \frac{घ-ग}{२}$$

$$\begin{aligned} ८. ज्या २ क &= २ ज्या क कोज्या क \\ \text{कोज्या २ क} &= \text{कोज्या}^२ क - ज्या^२ क = २ कोज्या^२ क - १ \\ &= १ - २ज्या^२ क \end{aligned}$$

$$\text{स्प २ क} = \frac{२ स्प क}{१ - स्प^२ क}$$

$$\text{ज्या ३ क} = ३ज्या क - ४ ज्या^३ क$$

$$\text{कोज्या ३ क} = ४ कोज्या^३ क - ३कोज्या क$$

$$\text{स्प ३ क} = \frac{३स्प क - स्प^३ क}{१ - ३स्प^२ क}$$

$$९. ज्या क = २ ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{क}{२}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या क} &= \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} - ज्या^२ \frac{क}{२} = २कोज्या^२ \frac{क}{२} - १ \\ &= १ - २ज्या^२ \frac{क}{२} \end{aligned}$$

$$\text{स्प क} = \frac{२स्प \frac{क}{२}}{१ - स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$\text{ज्या क} = \frac{२स्प \frac{क}{२}}{१ + स्प^२ \frac{क}{२}}$$

$$\text{कोज्या क} = \frac{1 - \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{2}}{1 + \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{2}}$$

$$1 - \text{कोज्या क} = 2 \text{ज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$1 + \text{कोज्या क} = 2 \text{कोज्या}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$\frac{1 - \text{कोज्या क}}{1 + \text{कोज्या क}} = \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{2}$$

$$10. \frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2 \text{खा गा}}, \dots\dots\text{इत्यादि}$$

$$\text{का} = \text{खा कोज्या ग} + \text{गा कोज्या ख}, \dots\dots\text{इत्यादि}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{खा गा}}}, \dots\dots\text{इत्यादि}$$

$$\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}{\text{खा गा}}}, \dots\dots\text{इत्यादि}$$

$$\text{स्प } \frac{\text{क}}{2} = \sqrt{\frac{\text{सा} - \text{खा}}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}}, \dots\dots\text{इत्यादि}$$

$$\text{ज्या क} = \frac{2}{\text{खा गा}} \sqrt{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}, \dots\dots\text{इत्यादि}$$

$$\text{स्प} \left(\frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} \right) = \left(\frac{\text{सा} - \text{गा}}{\text{खा} + \text{ग}} \right) \text{कोस्प} \frac{\text{फ}}{2}, \dots \dots \text{इत्यादि}$$

$$११. \Delta = \frac{१}{२} \cdot \text{ग्यागाज्या फ} = \frac{१}{२} \text{गाकाज्या ख}$$

$$= \frac{१}{२} \text{फाखाज्या ग}$$

$$= \sqrt{\text{सा}(\text{सा} - \text{फा})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}$$

$$\text{त्रा} = \frac{\text{फा}}{२ज्या क} = \frac{\text{खा}}{२ज्या ख} = \frac{\text{गा}}{२ज्या ग} = \frac{\text{काखामा}}{४\Delta}$$

$$\text{त्र} = \frac{\Delta}{\text{सा}} = (\text{सा} - \text{फा})\text{स्प} \frac{\text{फ}}{२} = (\text{सा} - \text{खा})\text{स्प} \frac{\text{ख}}{२}$$

$$= (\text{सा} - \text{गा})\text{स्प} \frac{\text{ग}}{२} = \text{धत्राज्या} \frac{\text{फ}}{२} \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\text{त्र}_1 = \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{फा}}$$

$$= \text{सास्प} \frac{\text{फ}}{२} = \text{धत्राज्या} \frac{\text{फ}}{२} \text{कोज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{कोज्या} \frac{\text{ग}}{२}$$

१२. वृत्तीय चौकोणाचें क्षेत्रफल

$$\sqrt{\text{सा} - \text{फा})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})(\text{सा} - \text{घा})}$$

$$\text{वृत्ताचें क्षेत्रफल} = \text{प्या त्र}^२$$

$$13. \text{એકમન} = \text{એકમ} + \text{એકન}$$

$$\text{એકમ}^{\frac{મ}{ન}} = \text{એકમ} - \text{એકન}$$

$$\text{એકમ}^n = n \text{ એકમ}$$

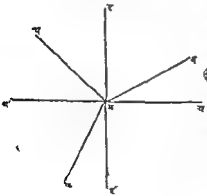
$$\text{એકમ} = \text{એકમ} \times \text{એકમ}$$

प्रकरण १ लें

कोणमापन

१.१ त्रिकोणमितीतील कोण.

दोन सरळ रेषांच्या छेदनात कोण निर्माण होतो व त्याचे मान (value) नेहमी 0° व 360° यांमध्ये असते हे आपण रोखेकीत (geometry) पाहिलेच आढे. हे कोण सदा धन (positive) समजले जातात. त्रिकोणमितीत (trigonometry) कोणाची कल्पना अधिक व्यापक घेतली आहे.



अ १.१

समजा मग ही रेषा एकाच समतलांत (plane) म विट्टूभोवती फिरूं शकते. मग या आदिम स्थितीतून (initial position) निघून आणि प्रतिघटीवत् (anticlockwise) परिभ्रमण (revolution) करून ती मग या स्थितीत येते. मग या आदिम स्थितीपासून

$$\text{याणि } 1^{\circ} = \left(\frac{1}{10}\right)^{\circ}$$

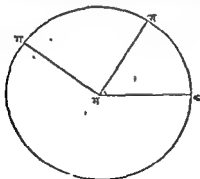
उदाहरण १— शक्ति मापांत व्यक्त करा.

$$(१) ४१^{\circ}२२'३९'' \quad (२) १५^{\circ}३२'५१''$$

उदाहरण २— पादिक मापांत व्यक्त करा.

$$(१) ७२^{\circ} ४३' २७'' \quad (२) ८७^{\circ} १३' ५५''$$

१.३ आरीय (radian) अथवा चतुल (circular) माप.
कोपल्यादि वृत्ताच्या (circle) त्रिज्येप्रवृत्त्या लांबीच्या चापाने (arc) वृत्तकेन्द्राशी (centre) आपातित (subtended) केलेल्या कोणाला आर (radian) म्हणतात.



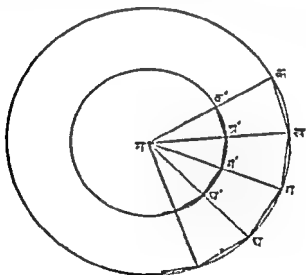
आ. १.२

याजूच्या आकृतीत कणम घृत्ताचें म हें केन्द्र अमून चाप कण घृत्तात्रिज्येपयदा लांब आहे.

म्हणून कणम या कोणाचें माप एक आर होईल. कणम कोण 1° असा लिहितात.

कणम या कोणत्याहि कोणाचें आरीय माप त्यांतलि आरांच्या संख्येइतकें होईल.

१.४ कोणत्याहि घृत्ताचा परिघ आणि व्यास यांची निष्पत्ति (ratio) अचल (constant) असते.



च. १.१

मं हें एक केन्द्र असलेलीं दोन वृत्तें काढा. बाहेरील वृत्तांत स वाजू असलेल्या कखगघ...या नियमित (regular) बहुभुजाचे (polygon) अंतर्लेखन (inscribe) करा. मक, मख, मग, मघ, ... या त्रिज्या आंतील वृत्ताला क', ख' ग', घ', ... या बिंदूंत छेदतात असे समजा. म्हणून क'ख' ग' घ' ... हाहि एक स वाजू असलेला नियमित बहुभुज आंतील वृत्तांत अंतर्लिखित होतो.

आता, मक = मख

आणि मक' = मख'

म्हणून, मकख घ मक'ख' या त्रिकोणांत,

मक मख

$\frac{मक}{मक'} = \frac{मख}{मख'}$

आणि \angle म साधारण (common).

म्हणून हे दोन त्रिकोण समरूप (similar) आहेत.

कख मक

$\therefore \frac{कख}{क'ख'} = \frac{मक}{मक'}$

आता, $\frac{\text{कखगघ} \dots \text{बहुभुजाचें परिमाप (perimeter) स.कख}}{\text{क'ख'ग'घ'} \dots \text{बहुभुजाचें परिमाप}} = \frac{\text{स.क'ख'}}$

$= \frac{कख}{क'ख'}$

$= \frac{मक}{मक'}$

आता भुजांची संख्या स कितीही असली तरी चरील संबंध (relation) सत्य राहील.

म्हणून स ही संख्या अनंत (infinite) केल्यास बहु-भुजांची परिमाणे जवळजवळ त्यांच्या संवादी (corresponding) वृत्तांच्या परिमांडितकी होतील.

$$\text{यावरून } \frac{\text{कखगघ} \dots \text{वृत्ताचा परिघ}}{\text{क'ख'ग'घ'...वृत्ताचा परिघ}} = \frac{\text{मक}}{\text{मक'}}$$

$$= \frac{\text{कखगघ} \dots \text{वृत्ताची त्रिज्या}}{\text{क'ख'ग'घ'... वृत्ताची त्रिज्या}}$$

$$\text{किंवा, } \frac{\text{कखगघ} \dots \text{वृत्ताचा परिघ}}{\text{कखगघ} \dots \text{वृत्ताची त्रिज्या}} =$$

१

$$\frac{\text{क'ख'ग'घ'...वृत्ताचा परिघ}}{\text{क'ख'ग'घ'... वृत्ताची त्रिज्या}}$$

दोन्ही वृत्तांच्या परिमाणांवद्दल (sizes) कोणताच निबंध (restriction) नसल्यामुळे $\frac{\text{वृत्तपरिघ}}{\text{त्रिज्या}}$ ही निष्पत्ति सर्व वृत्तांकरिता एकच असली पाहिजे. व्यास त्रिज्येच्या दुप्पट असतो, म्हणून $\frac{\text{वृत्तपरिघ}}{\text{व्यास}}$ ही निष्पत्तीही स्थिरांक (constant) आहे. हा स्थिरांक ज्या या अक्षराने दर्शविला जातो.

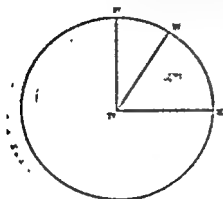
$$\text{प्याचे मान जवळजवळ } \frac{22}{7} \text{ किंवा } 3.14159 \text{ आहे.}$$

उपसाध्य (Corollary):— जर गृहाची त्रिज्या r असेल, तर

$$\text{परिघ} = 2\pi \times \text{प्या}$$

$$= 2\pi r$$

१.५ एका लंबकोनांमधील भागांची संख्या काढणे.



आ. १.४

महं करण गृहाचे
केंद्र असून त्याची
त्रिज्या r आहे.
ताला, $\angle \text{कमरा} = 90^\circ$
य $\angle \text{कमरा} = 1^\circ$
आता, गृहघाटांनी
केंद्राशी बसलेले कोण
त्यांच्या लांबीची
अनुपाती (proportional) असतात.

$$\therefore \frac{\angle \text{कमरा}}{\angle \text{कमरा}} = \frac{\text{प्या वग}}{\text{प्या वग}}$$

$$= \frac{\frac{1}{8} \text{ परिघ}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{\frac{1}{8} (2\pi r)}{r}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \angle \text{कमंग} = \left(\frac{\text{प्या}}{2}\right) \angle \text{कमख} \\ = \left(\frac{\text{प्या}}{2}\right)^{\text{वा}}$$

म्हणून एका लंबकोणांत $\frac{\text{प्या}}{2}$ आर समाविष्ट होतात.

$$\text{किंवा, १ आर} = \left(\frac{2}{\text{प्या}}\right) \times (\text{१लंबकोण})$$

पण प्या हा स्थिरांक आहे.

म्हणून १ आर हा अचल कोण आहे.

१.६ एक आर कोणाची माहत्ता.

$$१^{\text{वा}} = \frac{2}{\text{प्या}} \times (\text{१लंबकोण})$$

$$= \frac{2 \times ९०^{\circ}}{\text{प्या}}$$

$$= १८०^{\circ} \times (०.३१८३१)$$

$$= ५७.२९५८$$

$$= ५७^{\circ} १७' ४३.८'' \quad (\text{जवळजवळ})$$

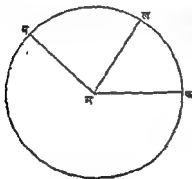
१.७ पुढील सूत्राच्या (formula) साहाय्याने आरीय, पाष्टिक व शक्तिरूपांचे परस्परान्त परिवर्तन करता येते.

$$\frac{\text{प्या}^{\text{म}}}{2} = ९०^{\circ} = १००^{\text{म}}$$

या घरील आ हे मूर्धाक्षर सहसा लिहीत नाहीत, पण ते अद्यावत असते.

$$१.८ \quad \text{कोणत्याही कोणाचे आरीय माप} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

कमय हा कोणताही एक कोण आहे. म हा बिंदु केंद्र व मक त्रिज्या घेऊन एक वृत्त काढा आणि त्याला मक आणि मय ला क आणि य मध्ये छेदू द्या. परिघावर चाप कय = त्रिज्या होईल असा ख बिंदु द्या. मय जोडा.



आ. १.५

यावरून, $\angle कमय = १^{\text{म}}$
 आतां शेषिकीने,

$$\begin{aligned} \frac{\angle कमय}{\angle कमय} &= \frac{\text{चाप कय}}{\text{चाप कय}} \\ &= \frac{\text{चाप कय}}{\text{त्रिज्या}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle कमय &= \left(\frac{\text{चाप कय}}{\text{त्रिज्या}} \right) \times \angle कमय \\ &= \frac{\text{चाप कय}}{\text{त्रिज्या}} \times १ \text{ मर} \end{aligned}$$

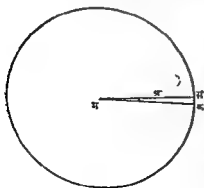
त्रिज्या, कस चापाची लांबी आणि कमव कोणाचें आरीय माप यांचें अभिधान (notation) क्रमशः त्र, व आणि अ ने केल्यास,

$$अ = \frac{व}{त्र}$$

अथवा व = त्र.अ

१.२ उदाहरण १— गोलाच्या (sphere) एकाच ध्रुव-वृत्तावर (meridian) असलेल्या दोन बिंदूंच्या अक्षवृत्तांतील (latitudes) कोण $३^{\circ} ७' ३०''$ आहे व त्यांच्यामधील गोल-पृष्ठावर मोजलेलें अंतर ५ प्रांगुल (inch) आहे.

तर $\frac{१}{व्या} = ३१८३१$ घेऊन गोलाची त्रिज्या काढा.



आ १.६

क आणि ख हे दिलेले दोन बिंदू ज्या ध्रुववृत्तावर आहेत त्यांतून जाणारा गोलीय छेद (section of the sphere) आकृतीत दाखविला आहे. म हें गोलाचें केन्द्र असून त्र त्याची त्रिज्या आहे.

$$\frac{\text{चाप कक्ष}}{\text{त्रिज्या}} = \angle \text{कमल मधील आरांची संख्या}$$

$$\text{आता, चाप कक्ष} = 4 \text{ प्रांगुल}$$

$$\text{आणि } \angle \text{कमल} = 3^\circ 3' 30''$$

$$\therefore \frac{4}{r} = 3^\circ 3' 30'' \text{ मधील आरांची संख्या}$$

$$= \frac{3^\circ}{6} \text{ मधील आरांची संख्या}$$

$$= \frac{3}{6} \times \frac{180}{180}$$

$$\therefore r = \frac{4 \times 6 \times 180}{24 \times 180} = 2.22 \times 2.22$$

$$= 2.22 \times 2.22 \text{ प्रांगुल}$$

उदाहरण २— एका त्रिकोणाचे कोण समांतर श्रेढीत (A.P.)

असून त्याच्या लघुत्तम कोणांतील आर घ महत्तम कोणांतील अंशक यांची निष्पत्ति ८:५ आहे. तर त्रिकोणाचे कोण अंशांत काढा.

समजा, $(y-r)^\circ$, y° व $(y+r)^\circ$ हे त्रिकोणाचे कोण आहेत.

आता, त्रिकोणाच्या तीन कोणांचा योग (sum) 180° असतो.

$$\therefore (y-r) + y + (y+r) = 180$$

$$\text{किंवा, } 3y = 180$$

किंवा, $x = 60$

म्हणून $(60 - x)^\circ$, 60° , $(60 + x)^\circ$ हे त्रिकोणाचे कोण होतील.

$$\text{आता, } (60 - x)^\circ = \left\{ \frac{\text{व्या}}{180} (60 - x) \right\} \text{ अर}$$

$$\text{आणि } (60 + x)^\circ = \left\{ (60 + x) \frac{10}{9} \right\} \text{ अ}$$

$$\therefore \frac{\frac{\text{व्या}}{180} (60 - x)}{(60 + x) \frac{10}{9}} = \frac{\text{व्या}}{200}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{व्या}}{200} \left(\frac{60 - x}{60 + x} \right) = \frac{\text{व्या}}{200}$$

$$\text{किंवा } 2(60 - x) = 60 + x$$

$$\therefore x = 20$$

\therefore इष्ट कोण 40° , 60° आणि 100°

उदाहरणसंग्रह १

- (१) ४२ प्रांगुल व्यास असलेले एक चतुर्ल विम्ब (disc) घर्गळत सोडले. तर विम्बाच्या एका भ्रमणांत त्याचे केन्द्र किती अंतर जाते ते वाढा. (व्या = $\frac{22}{7}$)

- (२) एक लहान किट्टा एका स्थिर (fixed) समांग (uniform) वर्तुळतारेवर चालत आहे. प्रत्येक कलेंत १३२ शतिमान (cms.) या वेगाने तो १७ कलेंत तारेभोवती तीन प्रदक्षिणा करतो. तर तारेची त्रिज्या

काढा. $\left(\frac{1}{\text{cm}} = .३१८३१\right)$

- (३) दोन नियमित षट्भुजाकृतींच्या भुजांच्या संख्या २:७ या प्रमाणांत असल्यास आणि पहिलीच्या कोणांतील अंश व दुसरीच्या कोणांतील अंशक यांचे प्रमाण ४२:५५ असल्यास त्या 'आकृतींच्या बाजू किती असल्या पाहिजेत ते काढा.

- (४) एका पंचभुजाचे (pentagon) कोण समांतर श्रेढीत असून त्याचा महत्तम कोण लघुत्तम कोणाच्या दुप्पट आहे तर सर्व कोण अंशांत व आरीय मापांत काढा.

- (५) (१) २॥ बाजूतां, (२) ७ बाजून २० कलेंनी, व (३) पावणेदहा बाजूतां घड्याळ्याच्या फाट्यांसचे होणारे कोण अंशांत, अंशानांत व आरीय व्यक्त करा.

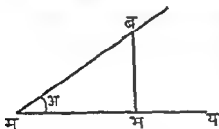
- (६) किती अंतरावर ५ पाद (foot) उंचीचा भुज्य २०'

कोण आपातित करेल? $\left(\frac{1}{\text{cm}} = .३१८३१\right)$

प्रकरण दुसरें

न्यूनकोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती

२.१ यमव हा एक न्यूनकोण अन्तून त्याचें माप अ आहे असें



आ. २.१

समजा. मय या रेघेत व हा कोण-ताहि बिंदु घेऊन व पासून मय वर वम हा लंब काढा.

यमम या त्रिकोणांत मय हा कर्ण (hypo-

tenuse) वम हा लंब (perpendicular) व मम हा आधार (base) आहे. अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय (trigonometrical) निष्पत्तींच्या परिभाषा (definitions) पुढे दिल्याप्रमाणे आहेत.

अ या कोणाची ज्या (sine) किंवा ज्या (अ) = $\frac{\text{मय}}{\text{मय}}$ किंवा लंब कर्ण

अ या कोणाची कोटिज्या (cosine) किंवा कोज्या (अ) = $\frac{\text{मव}}{\text{मभ}}$
 किंवा $\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

अ या कोणाची स्पर्शज्या (tangent) किंवा स्प (अ) = $\frac{\text{भव}}{\text{मभ}}$
 किंवा $\frac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$

अ या कोणाची व्युत्क्रमज्या (cosecant) किंवा व्युज्या अ = $\frac{\text{मव}}{\text{भव}}$
 किंवा $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लंब}}$

अ या कोणाची व्युत्क्रमकोटिज्या (secant) किंवा व्युत्कोज्या (अ) = $\frac{\text{मव}}{\text{मभ}}$ किंवा $\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

अ या कोणाची कोटिस्पर्शज्या (cotangent) किंवा
 कोस्प (अ) = $\frac{\text{मभ}}{\text{भव}}$ किंवा $\frac{\text{आधार}}{\text{लंब}}$

या सहा निष्पत्तींशिवाय आणखीहि दोन निष्पत्ती आहेत,
 परंतु त्याचा क्वचित्च उपयोग होतो, त्या खाली दिल्या आहेत.

अ या कोणाची उत्क्रमज्या (versed sine)

किंवा उज्या (अ) = $1 - \text{कोज्या (अ)}$

अ या कोणाची उत्क्रमकोटिज्या (covered sine)

किंवा उत्को (अ) = १ - ज्या (अ)

प्रत्येक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति दोन आयामांची (lengths) निष्पत्ति आहे. म्हणून सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती संख्यात्मक (numerical) राशी (quantities) आहेत हे लक्षांत ठेवावे.

२.२ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या मानांच्या सीमा. घरील अनुच्छेदाच्या (articulo) आकृतीवरून सहज दिसून येईल की, अ कोणाचे मान कांहीहि असले तरी

भय < मय

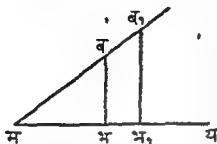
तसेच, मभ < मय

म्हणून कोणत्याहि कोणाची ज्या आणि कोटिज्या १ पेक्षा अधिक असू शकत नाही.

तसेच, कोणत्याहि कोणाची व्युत्क्रमकोटिज्या आणि व्युत्क्रमज्या १ पेक्षा कमी असू शकत नाही.

पण भय व मभ यांना स्वतंत्रपणे कांहीहि मान असू शकते. त्यामुळे स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या यांच्या मानांच्या सीमा (limits) ठरविता येत नाहीत. त्यांचे मान शून्यापासून (zero) अनन्तापर्यंत (infinity) कोणतेहि अन् शकते.

२.३ दिलेल्या कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती नेहमी एकच असतात.



आ. २.२

यमत्र हा कोणताही कोण आहे. मत्र रेषेत य आणि य, हे कोणतेही दोन बिंदू घ्या आणि, य आणि य, पासून मत्र रेषेवर यभ आणि य,भ, हे लंब काढा.

आता, यभम आणि य,भ,म या त्रिकोणांत

म हा कोण साधारण आहे.

आणि $\angle यभम = \angle य,भ,म =$ प्रत्येकी लंबकोण.

\therefore यभम व य,भ,म हे त्रिकोण समरूप आहेत.

$$\therefore \text{म्हणून } \frac{\text{यभ}}{\text{मय}} = \frac{\text{य,य,}}{\text{मय,}}$$

अर्थात्, मयवर कोणताही बिंदू घेतला तरी यमत्र कोणाच्या उभेच मान बदलत नाही.

याचप्रमाणे, याकीच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तीही बदलत नाहीत हे दाखविता येईल.

२.४ व्युत्क्रम संबंध (reciprocal relations) -

२.१ या अनुच्छेदाच्या आरंभीवरून,

$$\text{ज्या (म) व्युज्या (म)} = \frac{\text{मय}}{\text{मय}} \times \frac{\text{मय}}{\text{मय}}$$

$$= १$$

$$\text{महणून, व्युज्ज्या (अ)} = \frac{१}{\text{ज्या (अ)}} \quad (१)$$

$$\text{त्याचप्रमाणे, व्युत्कोज्या(अ)} = \frac{१}{\text{कोज्या (अ)}} \quad (२)$$

$$\text{आणि कोरूप (अ)} = \frac{१}{\text{रूप (अ)}} \quad (३)$$

हैं सहज दिम्न येईल.

टीप:— यापुढे आपण ज्या (अ), कोज्या (अ), रूप (अ) इत्यादि निष्पत्ती ज्या अ, कोज्याअ, रूप अ, इत्यादि अशा लिई.

२.५ मूलभूत ऐकात्म्ये (fundamental identities)—
पथम त्रिकोणांत (भारुति § २.१)

$$\angle \text{ममय} = ९०^\circ$$

$$\therefore \text{मव}^२ = \text{मव}^२ + \text{मम}^२$$

या समीकाराला (equation) अनुक्रमें मव^२, मम^२ व मव^२ नें भागिल्यास,

$$\left(\frac{\text{मव}}{\text{मव}}\right)^२ + \left(\frac{\text{मम}}{\text{मव}}\right)^२ = १ \dots\dots\dots (क)$$

$$\left(\frac{\text{मव}}{\text{मम}}\right)^२ = \left(\frac{\text{मव}}{\text{मम}}\right)^२ + १ \dots\dots\dots (का)$$

$$\left(\frac{\text{मय}}{\text{मय}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{मम}}{\text{मय}}\right)^2 \dots\dots\dots(\text{कि})$$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या परिभाषांवरून व (क) समीकारानुसार,

$$(\text{ज्याअ})^2 + (\text{कोज्याअ})^2 = 1$$

$$\text{अथवा, ज्या}^2 \text{ अ} + \text{कोज्या}^2 \text{ अ} = 1 \dots\dots\dots(४)$$

तसेंच (फा) आणि (कि) वरून,

$$\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{ अ} = 1 + \text{स्प}^2 \text{ अ} \dots\dots\dots(५)$$

$$\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} = 1 + \text{कोस्प}^2 \text{ अ} \dots\dots\dots(६)$$

$$\text{शिवाय, } \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{भव/मय}}{\text{मम/मय}} = \frac{\text{भव}}{\text{मम}} = \text{स्प अ}$$

$$\text{अर्थात् स्प अ} = \frac{\text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \dots\dots\dots(७)$$

$$\text{तसेंच, कोस्प अ} = \frac{\text{कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} \dots\dots\dots(८)$$

२.६ आता आपण वर सिद्ध केलेल्या मूलभूत पैका-
त्म्यांच्या साहाय्याने कांही उदाहरणे सोडवू.

$$\begin{aligned} \text{उदाहरण १} - & \sqrt{\frac{1 - \text{ज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}}} \sqrt{\frac{\text{व्युत्कोज्या अ} + 1}{\text{व्युत्कोज्या अ} - 1}} \\ & = \text{कोस्प अ} \left(\frac{1 + \text{कोज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}} \right) \end{aligned}$$

हैं सिद्ध करा.

$$\begin{aligned}
 \text{वाम पक्ष} &= \sqrt{\frac{1 - ज्या^2 अ}{(1 + ज्या अ)^2}} \sqrt{\frac{(व्युत्कोज्या अ + 1)^2}{व्युत्कोज्या^2 अ - 1}} \\
 &= \frac{कोज्या अ}{1 + ज्या अ} \times \frac{व्युत्कोज्या अ + 1}{रूप अ} \\
 &= \frac{1 + कोज्या अ}{(1 + ज्या अ) रूप अ} \text{ (गतानुच्छेदांतील} \\
 &\quad \text{(४) व (५) या सूत्रानुसार)} \\
 &= \frac{(1 + कोज्या अ)}{(1 + कोज्या अ) रूप अ} \\
 &= कोरूप अ \cdot \frac{(1 + कोज्या अ)}{(1 + ज्या अ)} \\
 &= \text{दक्षिण-पक्ष (right hand side)}
 \end{aligned}$$

उदाहरण, २— सिद्ध करा :—

$$(1 + कोरूप अ - व्युज्या अ)(1 + रूप अ + व्युत्कोज्या अ) = २$$

$$\begin{aligned}
 \text{वाम पक्ष} &= \left(1 + \frac{कोज्या अ}{ज्या अ} - \frac{१}{ज्या अ}\right) \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{ज्या अ}{कोज्या अ} + \frac{१}{कोज्या अ}\right) \\
 &= \left(\frac{कोज्याअ + ज्या अ - १}{ज्या अ}\right) \\
 &\quad \times \left(\frac{कोज्या अ + ज्या अ + १}{कोज्या अ}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})^2 - 1}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या}^2 अ + \text{ज्या}^2 अ + 2 \text{ज्या अ कोज्या अ} - 1}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}}$$

$$= \frac{2 \text{ज्या अ. कोज्या अ}}{\text{ज्या अ. कोज्या अ}} \quad \text{सूत्र (४) वरून}$$

$$= 2$$

उदाहरण ३— सिद्ध करा —

$$\begin{aligned} \text{कोज्या}^2 अ + \text{ज्या}^2 अ &= 1 - 2 \text{ज्या}^2 अ (1 - \text{ज्या}^2 अ) \\ &= 1 - 2 \text{कोज्या}^2 अ (1 - \text{कोज्या}^2 अ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{थाता, घाम पक्ष} &= (\text{कोज्या}^2 अ + \text{ज्या}^2 अ) \times \\ &(\text{कोज्या}^2 अ - \text{कोज्या}^2 अ \text{ ज्या}^2 अ + \text{ज्या}^2 अ}) \end{aligned}$$

$$= \text{कोज्या}^2 अ - \text{कोज्या}^2 अ \text{ ज्या}^2 अ + \text{ज्या}^2 अ$$

$$(\text{ज्या}^2 अ + \text{कोज्या}^2 अ} = 1)$$

$$= (\text{कोज्या}^2 अ + \text{ज्या}^2 अ)^2$$

$$- 2 \text{कोज्या}^2 अ \text{ ज्या}^2 अ$$

$$= 1 - 2 \text{ज्या}^2 अ (1 - \text{ज्या}^2 अ)$$

$$= 1 - 2 \text{कोज्या}^2 अ (1 - \text{कोज्या}^2 अ)$$

उदाहरणसंग्रह २

पुढील पैकात्म्यें सिद्ध कराः—

$$(१) \frac{\text{ज्या } अ + \text{व्युत्कोज्या } अ}{\text{कोज्या } अ + \text{व्युज्ज्या } अ} = \text{स्प } अ \quad [\text{घनारस } १९३८]$$

$$(२) \text{व्युज्ज्या}^२ अ - \text{कोस्प}^२ अ = १ + २ \text{ कोस्प}^२ अ$$

$$(३) \text{व्युत्कोज्या } अ - \text{स्प } अ = \frac{\text{कोस्प } अ}{१ + \text{व्युज्ज्या } अ}$$

$$(४) \sqrt{\frac{\text{व्युत्कोज्या } अ - १}{\text{व्युत्कोज्या } अ + १}} = \text{व्युज्ज्या } अ - \text{कोस्प } अ$$

$$(५) \frac{\text{कोस्प } अ + \text{व्युज्ज्या } अ - १}{\text{कोस्प } अ - \text{व्युज्ज्या } अ + १} = \sqrt{\frac{१ + \text{कोज्या } अ}{१ - \text{कोज्या } अ}}$$

$$(६) \text{कोस्प}^२ अ + \text{कोस्प}^२ अ = \text{व्युज्ज्या}^२ अ - \text{व्युज्ज्या}^२ अ$$

$$(७) [\text{व्युत्कोज्या}^२ अ \text{ स्पअ} + २ \text{ व्युत्कोज्या } अ \text{ व्युज्ज्या } अ + \text{व्युज्ज्या}^२ अ \text{ कोस्प } अ] = \text{व्युत्कोज्या}^२ अ \times \text{व्युज्ज्या}^२ अ \quad [\text{घनारस } १९४२]$$

$$(८) \frac{\text{स्प}^२ अ}{१ + \text{स्प}^२ अ} \cdot \frac{१ + \text{कोस्प}^२ अ}{\text{कोस्प}^२ अ} = \text{ज्या}^२ अ \times$$

व्युत्कोज्या^२ अ

$$(९) \frac{१}{\text{व्युत्कोज्या } अ + \text{स्पअ}} - \frac{१}{\text{कोज्या } अ}$$

$$= \frac{1}{\text{कोज्या अ}} - \frac{1}{\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{स्प अ}}$$

$$(10) \text{ व्युत्कोज्या अ} + \text{स्प अ} = \frac{1 + \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = \frac{\text{कोज्या अ}}{1 - \text{ज्या अ}}$$

$$= \frac{1 + \text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ}}{1 + \text{कोज्या अ} - \text{ज्या अ}}$$

[नागपूर १९३९]

$$(11) \frac{\text{कोस्प क} - \text{स्प ख}}{\text{कोस्प ख} - \text{स्प क}} = \text{कोस्प क स्प ख}$$

$$(12) 1 - \frac{\text{ज्या}^2 \text{ अ}}{1 + \text{कोस्प अ}} - \frac{\text{कोज्या}^2 \text{ अ}}{1 + \text{स्प अ}} = \text{ज्या अ कोज्या अ}$$

[वनारस १९४३]

$$(13) \frac{\text{कोज्या अ}}{1 - \text{स्प अ}} + \frac{\text{ज्या अ}}{1 - \text{कोस्प अ}} = \text{ज्या अ} + \text{कोज्या अ}$$

[वनारस १९४५]

$$(14) \text{ज्या}^2 \text{ अ} + \text{ज्या}^2 \text{ अ कोज्या}^2 \text{ अ} - \text{ज्या}^2 \text{ अ कोज्या}^2 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ} = \text{ज्या}^2 \text{ अ} - \text{कोज्या}^2 \text{ अ}$$

$$(15) (\text{कोस्प अ} + \text{व्युज्ज्या अ})^2 = \frac{1 + \text{कोज्या अ}}{1 - \text{कोज्या अ}}$$

$$(16) 2 \text{ स्प}^2 \text{ अ} = \frac{1}{\text{व्युज्ज्या अ} - 1} - \frac{1}{\text{व्युज्ज्या अ} + 1}$$

[नागपूर १९३९]

$$(17) \frac{\text{कोज्या अ}}{1 - \text{ज्या अ}} + \frac{1 - \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} = 2 \text{ व्युत्कोज्या अ}$$

$$(१८) \quad \frac{२ \text{ व्युत्कोज्या अ स्प अ} - \text{स्प अ}}{१ - \text{व्युत्कोज्या अ} + \text{व्युत्कोज्या}^२ \text{ अ} + \text{स्प}^२ \text{ अ}} = \text{ज्या अ}$$

$$(१९) \quad (\text{स्प क} + \text{व्युज्ज्या ख})^२ - (\text{कोस्प ख} - \text{व्युत्कोज्या क})^२ = २ \text{ स्प क कोस्प ख} (\text{व्युज्ज्या क} + \text{व्युत्कोज्या ख})$$

$$(२०) \quad \text{जर स्प अ} + \text{ज्या अ} = \text{म} \\ \text{व स्प अ} - \text{ज्या अ} = \text{न असेल} \\ \text{तर म}^२ - \text{न}^२ = ४ \quad \checkmark \text{मन हें सिद्ध करा.}$$

[वनारस १९३९]

(२१) ज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा :—

$$(\text{व्युत्कोज्या अ} - \text{कोज्या अ}) \sqrt{\frac{१ - \text{ज्या अ}}{१ + \text{ज्या अ}}}$$

(२२) व्युत्कोज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा :—

$$\text{कोज्या अ} + \frac{\text{स्पअ कोज्या अ}}{\text{ज्या अ}} + \frac{\text{ज्या}^२ \text{अ}}{\text{कोज्या}^२ \text{अ}}$$

[वनारस १८९९]

२७ एखाद्या कोणाची कोणतीहि एक त्रिकोणमितीय निष्पत्ति माहीत असल्यास त्या कोणाच्या इतर सर्व निष्पत्ती काढतां येतात.

उदाहरण १— सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती कोटिज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.

समजा, कोज्या अ = क्ष

$$\therefore ज्या अ = \sqrt{1 - कोज्या^2 अ}$$

$$= \sqrt{1 - क्ष^2}$$

$$\therefore व्युज्या अ = \frac{1}{ज्या अ}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - क्ष^2}}$$

$$\therefore व्युत्कोज्या अ = \frac{1}{कोज्या अ}$$

$$= \frac{1}{क्ष}$$

$$स्य अ = \frac{ज्या अ}{कोज्या अ}$$

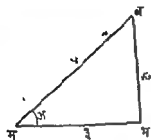
$$= \frac{\sqrt{1 - क्ष^2}}{क्ष}$$

$$कोस्य अ = \frac{कोज्या अ}{ज्या अ}$$

$$= \frac{क्ष}{\sqrt{1 - क्ष^2}}$$

उदाहरण २— कोस्य अ = $\frac{3}{\sqrt{7}}$ असल्यास इतर त्रिकोण-

मितीय निष्पत्तीची संख्यात्मक मानें काढा.



आ. २.३

वमम या लंबकोणत्रिकोणांत,

$$\angle \text{भमअ} = \text{अ},$$

$$\text{भअ} = \sqrt{७},$$

$$\text{वमम} = ३$$

$$\text{म्हणून, कोस अ} = \frac{३}{\sqrt{७}}$$

$$\begin{aligned} \text{आता, मअ} &= \sqrt{\text{मभ}^2 + \text{भअ}^2} \\ &= \sqrt{९ + ७} \\ &= ४ \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ज्या म} = \frac{\text{भअ}}{\text{मअ}} = \frac{\sqrt{७}}{४}$$

$$\text{याणि व्युज्या अ} = \frac{४}{\sqrt{७}}$$

$$\text{स अ} = \frac{३}{\text{कोस अ}} = \frac{\sqrt{७}}{३}$$

$$\text{कोज्या म} = \frac{३}{४}$$

$$\text{आणि व्युत्कोज्या म} = \frac{४}{३}$$

$$\text{उदाहरण ३— व्युत्कोज्या म - स अ} = \sqrt{\frac{३}{५}} \text{ असल्यास}$$

ज्या म काढा.

$$\begin{aligned}
 \text{माता, व्युत्कोज्या अ-रूप अ} &= \frac{1 - \text{ज्या अ}}{\text{कोज्या अ}} \\
 &= \frac{1 - \text{ज्या अ}}{\sqrt{1 - \text{ज्या}^2 \text{अ}}} \\
 &= \frac{\sqrt{1 - \text{ज्या अ}}}{\sqrt{1 + \text{ज्या अ}}}
 \end{aligned}$$

$$\text{गहणून } \sqrt{\frac{1 - \text{ज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{किंवा, } \frac{1 - \text{ज्या अ}}{1 + \text{ज्या अ}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore 4 \text{ ज्या अ} = 2$$

$$\text{किंवा ज्या अ} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण ४— जर कोरूप अ = $\frac{4}{5}$ असेल तर

$$\frac{\text{स कोज्या अ} - \text{स ज्या अ}}{\text{स कोज्या अ} + \text{स ज्या अ}} \text{ ची मान काढा.}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{स कोज्या अ} - \text{स ज्या अ}}{\text{स कोज्या अ} + \text{स ज्या अ}} &= \frac{\text{स कोरूप अ} - \text{स}}{\text{स कोरूप अ} + \text{स}}
 \end{aligned}$$

[अंश (numerator) प
हर (denominator)
यांना ज्या अ ने भागून]

$$= \frac{\text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}} - \text{क्ष}}{\text{क्ष} \cdot \frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष}} + \text{क्ष}}$$

$$= \frac{\text{क्ष}^2 - \text{क्ष}^2}{\text{क्ष}^2 + \text{क्ष}^2}$$

उदाहरणसंग्रह ३

- (१) सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती ज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.
- (२) सर्व निष्पत्ती स्पर्शज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.
- (३) सर्व निष्पत्ती व्युत्क्रमकोटिज्येच्या रूपांत व्यक्त करा.
- (४) ज्या अ आणि कोज्या अ कोस्प अ च्या रूपांत व्यक्त करा.
- (५) कोज्या अ आणि कोस्प अ व्युज्ज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा.
- (६) एका कोणाची ज्या, $\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष} + २\text{क्ष})}{\text{क्ष}^2 + २\text{क्षक्ष} + २\text{क्ष}^2}$ आहे. तर त्या कोणाच्या इतर निष्पत्तींचे मान काढा.

[कलकत्ता १८७९.

- (७) जर २व्युत्कोज्या अ $= \frac{य}{२} + \frac{१}{य}$ असेल तर

(व्युज्ज्या अ + कोस्प अ) चें मान काढा.

(८) जर ज्याअ = $\frac{1}{\sqrt{4}}$ असेल तर

$\frac{\text{कोस्प}^2\text{अ} - \text{स्प}^2\text{अ}}{\text{कोस्प}^2\text{अ} + \text{स्प}^2\text{अ}}$ चें मान काढा.

(९) जर स्प अ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ असेल तर

$\frac{\text{व्युज्ज्या}^2\text{अ} - \text{व्युत्कोज्या}^2\text{अ}}{\text{व्युज्ज्या}^2\text{अ} + \text{व्युत्कोज्या}^2\text{अ}} = \frac{1}{2}$ हें दाखवा.

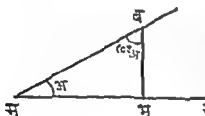
(१०) जर स्प^२अ = १ - न^२ असेल तर .

व्युत्कोज्या अ + स्प^२अ व्युज्ज्या अ = $(२ - न^२)^{\frac{1}{2}}$ हें दाखवा.
[घनारस १८९८]

प्रकरण तिसरें

काही प्रमाण (standard) कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती

३.१ लंबपूरक कोणांच्या निष्पत्ती.



यमभ हा कोणताहि एक न्यूनकोण आहे. मब रेपेंत व हा कोणताहि विंदु घेऊन त्यांतून मय वर यम हा लंब काढा.

* आ. ३.१

याचा यमभ या लंबकोणत्रिकोणांत यमभ हा कोण यमभ या कोणाचा लंबपूरक (complementary) आहे.

म्हणून $\angle यमभ = अ$ असल्यास $\angle मयभ = ९०^{\circ} - अ$ होईल.

आकृतीवरून,

$$\text{उया } (९०^{\circ} - अ) = \frac{\text{मभ}}{\text{मय}} = \text{कोज्या अ}$$

$$\text{कोज्या } (९०^{\circ} - अ) = \frac{\text{मय}}{\text{मय}} = \text{उया अ}$$

$$\text{स्प} (९०^{\circ} - \alpha) = \frac{\text{मम}}{\text{मव}} = \text{कोस्प } \alpha$$

त्याचप्रमाणे, व्युज्ज्या $(९०^{\circ} - \alpha) = \text{व्युत्कोज्या } \alpha$,

व्युत्कोज्या $(९०^{\circ} - \alpha) = \text{व्युज्ज्या } \alpha$,

कोस्प $(९०^{\circ} - \alpha) = \text{स्प } \alpha$

हैहि सिद्ध करतां येईल.

आता आपण नेहमी लागणाऱ्या कांही प्रमाण कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती काढूं.

३.२ ०° च्या निष्पत्ती.



आ. ३.२

मव या सदिश त्रिज्येने यमव हा अतिशय लहान कोण रेखिला असून मव ची लांबी स्थिर आहे. मव घर यम हा लंब काढा.

$$\text{म्हणून ज्या ममव} = \frac{\text{मव}}{\text{मव}}$$

आता ममव कोण हळूहळू असा लहान करा की शेवटी मव चे मय शी संपतन (coincidence) होऊन ममव कोण शून्य आणि मव = ० होईल.

$$\text{म्हणून, ज्या } ०^{\circ} = \frac{०}{\text{मव}} = ०$$

$$\text{आता, कोज्या ममव} = \frac{\text{मम}}{\text{मव}}$$

म्हणून भूमय कोण शून्य होतो तेव्हां .

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{भूम}}{\text{भूम}} = 1$$

$$\text{आणि } \sin 0^\circ = \frac{\text{ज्या } 0^\circ}{\cos 0^\circ}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$

$$\text{पण } \csc 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ}$$

$$= \frac{1}{0}$$

आता कोणत्याही परिमित (finite) राशीस अत्यणु (infinitely small) राशीने भागिले असतां आपणांस अनंताइतकी मोठी संख्या मिळते. ही अनंतराशी ∞ या चिन्हाने (symbol) दर्शवितात.

$$\text{म्हणून } \csc 0^\circ = \infty$$

$$\text{पुन्हा } \sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

$$\begin{aligned}\text{आणि कोस्य } 0^\circ &= \frac{1}{\text{स्य } 0^\circ} \\ &= \frac{1}{0} \\ &= \infty\end{aligned}$$

३.२१ 90° किंवा $\frac{\text{ज्या}}{2}$ च्या निष्पत्ती.

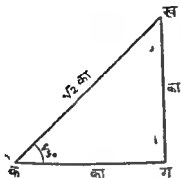
0° व 90° हे कोण संपूरक आहेत.
म्हणून ३.१ व ३.२ या अनुच्छेदांवरून,
ज्या $90^\circ = \text{कोज्या } 0^\circ$
 $= 1$
कोज्या $90^\circ = \text{ज्या } 0^\circ$
 $= 0$

$$\begin{aligned}\text{स्य } 90^\circ &= \frac{\text{ज्या } 90^\circ}{\text{कोज्या } 90^\circ} \\ &= \frac{1}{0} \\ &= \infty\end{aligned}$$

\therefore व्युज्ज्या $90^\circ = 1$,
व्युत्कोज्या $90^\circ = \infty$,
कोस्य $90^\circ = 0$.

अभ्यास :— 90° कोणाच्या निष्पत्ती रैखिकीने काढा.

३.३ 45° किंवा $\frac{\pi}{4}$ च्या निष्पत्ती.



आ ३.३

कखग या लंबकोण
समद्विभुज (isosceles)
त्रिकोणांत,

$$\angle ग = 90^\circ$$

$$\text{आणि } \angle क = \angle ख = 45^\circ$$

$$\text{समजा कग} = \text{खग} = \text{का}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{कख} &= \sqrt{\text{का}^2 + \text{का}^2} \\ &= \sqrt{2} \text{ का}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{ज्या } 45^\circ &= \frac{\text{खग}}{\text{कख}} \\ &= \frac{\text{का}}{\sqrt{2} \text{ का}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\text{कोज्या } 45^\circ = \frac{\text{कग}}{\text{कख}}$$

$$\begin{aligned}\text{स्प } 60^\circ &= \frac{\text{ज्या } 60^\circ}{\text{कोज्या } 60^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{याणि, व्युज्या } 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\text{व्युत्कोज्या } 60^\circ = 2,$$

$$\text{कोस्प } 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

३.५ 30° किंवा $\frac{\pi}{6}$ च्या निष्पत्ती.

30° व 60° हे लंबपूरक कोण आहेत.

म्हणून ३.१ व ३.४ या अनुच्छेदांनुसार,

$$\text{ज्या } 30^\circ = \text{कोज्या } 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{कोज्या } 30^\circ = \text{ज्या } 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{रूप } 30^\circ = \frac{\text{ज्या } 30^\circ}{\text{कोज्या } 30^\circ}$$

$$= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

आणि, व्युज्या $30^\circ = 2$,

$$\text{व्युत्कोश } 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{कोसा } 30^\circ = \sqrt{3}$$

अभ्यास:— ३.४ या अनुच्छेदाच्या आकृतीवरून 30° कोणाच्या निष्पत्ती काढा.

३.६ $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ व 90° या प्रमाण कोणांच्या निष्पत्ती वारंवार लागतात. त्या खालील सारणीच्या (table) रूपांत एकत्रित केल्या आहेत. ही सारणी विद्यार्थ्यांनी पाठ

करावी.

कोण	0°	30°	45°	60°	90°
ज्या	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
कोटिज्या	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
स्पर्शज्या	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
व्युत्क्रमज्या	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
व्युत्क्रम- कोटिज्या	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
कोटिस्पर्शज्या	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

३.६१ उदाहरण १—सत्यापन करा (verify) :—

$$\text{ज्या } 60^\circ = \frac{2 \text{ स्प } 30^\circ}{1 + \text{स्प } 30^\circ}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \text{ज्या } 60^\circ$$

$$= \text{याम पक्ष}$$

उदाहरण २— सिद्ध करा :—

$$(\text{कोज्या } 30^\circ + \text{स्प } 60^\circ)^2 + (\text{ज्या } 30^\circ + \sqrt{2} \text{ कोज्या } 60^\circ)^2 \\ + (\text{कोस्प } 60^\circ - \text{कोज्या } 30^\circ)^2 = \frac{43}{4}$$

$$\text{याम पक्ष} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \times \frac{1}{2} \right)^2 \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{27}{4} + \frac{9}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{27 + 18 + 1}{4}$$

$$= \frac{46}{4}$$

$$= \frac{५३}{६}$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरणसंग्रह ४

(१) सत्यापन करा :—

$$(१) \text{ ज्या } ६०^{\circ} = २ \text{ ज्या } ३०^{\circ} \text{ कोज्या } ३०^{\circ}$$

$$(२) \text{ कोज्या } ९०^{\circ} = \text{कोज्या}^२ ४५^{\circ} - \text{ज्या}^२ ४५^{\circ}$$

$$= २ \text{ कोज्या}^२ ४५^{\circ} - १$$

$$= १ - २ \text{ ज्या}^२ ४५^{\circ}$$

$$(३) \text{ ज्या } ३०^{\circ} = \sqrt{\frac{१ - \text{कोज्या } ६०^{\circ}}{२}}$$

$$(४) \text{ कोज्या } ३०^{\circ} = \sqrt{\frac{१ + \text{कोज्या } ६०^{\circ}}{२}}$$

* (२) सत्यापन करा :—

$$(१) \text{ ज्या } १३५^{\circ} = ३ \text{ ज्या } ४५^{\circ} - ४ \text{ ज्या}^३ ४५^{\circ}$$

$$(२) \text{ कोज्या } १३५^{\circ} = ४ \text{ कोज्या}^३ ४५^{\circ} - ३ \text{ कोज्या } ४५^{\circ}$$

$$(३) \text{ स्प } १२०^{\circ} = \frac{४ \text{ स्प } ३०^{\circ} - ४ \text{ स्प}^३ ३०^{\circ}}{१ - ६ \text{ स्प}^२ ३०^{\circ} + \text{स्प}^४ ३०^{\circ}}$$

* पांचवें प्रकरण शाल्यानंतर उदाहरण २ सोडवावे.

$$(४) \text{ कोज्या } १२०^{\circ} = \frac{१ - \text{स्प}^२ ६०^{\circ}}{१ + \text{स्प}^२ ६०^{\circ}}$$

(३) सिद्ध करा:—

$$\begin{aligned} & (\text{व्युत्कोज्या } ४५^{\circ} + \text{व्युज्ज्या } ६०^{\circ} + \text{कोस्प } ३०^{\circ}) \\ & = ४(\text{कोज्या } ४५^{\circ} + \text{ज्या } ६०^{\circ} + \text{स्प } ३०^{\circ}) = ४ \frac{१}{२} \end{aligned}$$

(४) सिद्ध करा:—

$$\begin{aligned} & (\text{व्युत्कोज्या } ३०^{\circ} \text{ स्प } ६०^{\circ} + \text{ज्या } ४५^{\circ} \text{ व्युज्ज्या } ४५^{\circ} \\ & + \text{कोज्या } ३०^{\circ} \text{ कोस्प } ६०^{\circ}) = \frac{७}{२} \end{aligned}$$

३.७ सीमेचा कल्पना.

$\frac{क}{१}$ हा भिन्न (fraction) विचारांत घ्या. क र्हे एक

विशदित स्थिर मान ठेवून य ची महत्ता बदला.

$$\text{उदाहरणार्थ, } \frac{क}{१} = १०क,$$

$$\frac{१०००क}{१०००} = १०००क$$

इत्यादि.

य जरजला कमी होईल तसतसे $\frac{क}{१}$ या भिन्नाचें मान

घाटत जाईल हें स्पष्ट आदे. य हा दर पुरेसा लहान करून $\frac{क}{य}$ या राशीचें मान पाहिजे तितकें घाटयितां येईल. म्हणजे य चें मान जेव्हां शून्याच्या समीप येईल तेव्हां $\frac{क}{य}$ हा भिन्न अनंताइतका मोठा होईल.

हें, य शून्यप्रवृत्त होतो (tends to zero), तेव्हां $\frac{क}{य}$ ची सीमा ∞ होते, किंवा संक्षेपतः,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{क}{य} \right) = \infty$$

अशा प्रकारें व्यक्त करतात.

पुन्हा, य ही राशि जर हळूहळू घाटवून शेवटीं अनंताइतकी मोठी केली तर $\frac{क}{य}$ हा भिन्न अत्यणु होईल;

$$\text{अर्थात् } \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{क}{य} \right) = 0$$

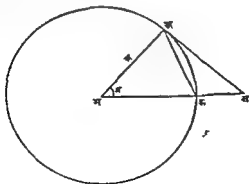
३.८ वृत्तशकलाचें (sector of a circle) क्षेत्रफळ.
म हें एका व त्रिज्या असणाऱ्या वृत्ताचें केन्द्र असून

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{कमख शकलाचें क्षेत्रफल} &= \frac{\alpha}{2} \text{ प्या} \\
 &\times (\text{संपूर्ण वृत्ताचें क्षेत्रफल}) \\
 &= \frac{\alpha}{2} \text{ प्या} \times \text{प्या त्र}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \alpha \text{ त्र}^2
 \end{aligned}$$

३.२ α आरीय मापांत आणि $0 < \alpha < \frac{\text{प्या}}{2}$ असेल

तर ज्या $\alpha < \alpha < \text{स्प } \alpha$.

त्र त्रिज्या असणाऱ्या एका वृत्ताचें म हें केन्द्र मनुन कमख हें घृतशकल आहे.



आ ३ ६

आकृतीवरून, कमल त्रिकोण हा कमल शकलांत पूर्ण-
पणे समाविष्ट झाला आहे, तसेच कमल शकलही मखस
त्रिकोणांत समाविष्ट झाले आहे हे दिसून येईल.

म्हणून, Δ कमल $<$ शकल कमल $<$ Δ मखस

$$\therefore \frac{1}{2} \sin^2 A < \frac{1}{2} \sin^2 B < \frac{1}{2} \sin^2 C$$

किंवा, $\frac{1}{2} \sin^2 A$ ने भागून

$$\sin A < \sin B < \sin C$$

$$३.९१ \quad \sin A \text{ शून्यप्रवृत्त होतो तेव्हा } \frac{\sin A}{\sin A} \text{ आणि } \frac{\sin C}{\sin A}$$

हा सीमांती प्रत्येकी एकासमान होतात.

वरील अनुच्छेदानुसार,

$$\sin A < \sin B < \sin C \dots \dots \dots (१)$$

प्रत्येकास $\sin A$ ने भागून,

$$१ < \frac{\sin B}{\sin A} < \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\text{किंवा } १ < \frac{\sin B}{\sin A} < \csc A$$

$\sin A$ अत्यंत होतो तेव्हा $\csc A$ अचें मान १ होते.

म्हणजेच $\frac{\sin B}{\sin A}$ ची सीमा १ होते.

तस्यैव (१) ला साधंत (throughout) स्प अ ने मागिल्यास,

$$\text{फोज्या अ} < \frac{\text{अ}}{\text{स्प अ}} < १$$

परंतु अ अत्यणु होतो तेव्हां फोज्या अ १ होते.

म्हणून $\frac{\text{अ}}{\text{स्प अ}}$ किंवा $\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}}$ ची सीमा १ होते.

हीं फलें (results) सामान्यतः खालील रूपांत लिहितातः—

$$\lim_{\text{अ} \rightarrow 0} \left(\frac{\text{ज्या अ}}{\text{अ}} \right) = १$$

$$\lim_{\text{अ} \rightarrow 0} \left(\frac{\text{स्प अ}}{\text{अ}} \right) = १$$

३.१.२ उदाहरण १— अ आरीय मापांत असल्यास

$$\lim_{\text{अ} \rightarrow \infty} \left[\text{स ज्या} \left(\frac{\text{अ}}{\text{स}} \right) \right] = \text{अ हें दाखना.}$$

$$\text{स ज्या} \left(\frac{\text{अ}}{\text{स}} \right) = \text{अ} \cdot \frac{\text{ज्या} \left(\frac{\text{अ}}{\text{स}} \right)}{\left(\frac{\text{अ}}{\text{स}} \right)}$$

$$\therefore \text{સી} \left[\text{મ} \text{જ્યા} \left(\frac{\text{અ}}{\text{સ}} \right) \right]_{\text{સ} \rightarrow \infty} = \text{અ} \cdot \text{સી} \frac{\text{જ્યા} \left(\frac{\text{અ}}{\text{મ}} \right)}{\left(\frac{\text{અ}}{\text{સ}} \right)}$$

$$= \text{અ} \cdot \text{સી} \frac{\text{જ્યા} \left(\frac{\text{અ}}{\text{સ}} \right)}{\left(\frac{\text{અ}}{\text{સ}} \right) \rightarrow 0}$$

$$= \text{અ} \cdot 1$$

$$= \text{અ}$$

ઉદાહરણ ૨— જ્યા ૩૦' થી ઠોકલ માન કાઢા.

$$\text{માતા, } ૩૦' = \frac{૧}{૨}$$

$$= \left(\frac{\text{પ્યા}}{૧૮૦ \times ૨} \right)^{\text{આ}}$$

$$\text{જ્યા } ૩૦' = \text{જ્યા} \left(\frac{\text{પ્યા}}{૩૬૦} \right)$$

$$= \frac{\text{પ્યા}^1}{૩૬૦} \quad \text{જવલજવલ}$$

$$= \frac{૩.૧૪૧૫૯}{૩૬૦}$$

$$= ૦.૦૦૮૭૨૬૬ \quad \text{જવલજવલ.}$$

उदाहरणसंग्रह ५.

टोकल मान पादाः—

- (१) कोज्या ३०', (२) ज्या २०'
 (३) व्युज्या १०' (४) व्युत्कोज्या १'
 (५) कोस्प $\angle ९०^\circ$

पुढील समीसार टोकल मानाने सोडयाः—

- (६) स्प ध $= ०.०१$ (७) ज्या अ $= ०.००२$
 (८) अ आरीय माणांत धसेल तर

$$\frac{\text{सी}}{\text{स}} \left[\text{स स्प} \left(\frac{\text{अ}}{\text{स}} \right) \right] = \text{अ हें मिळ करा.}$$

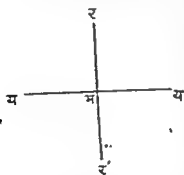
स $\rightarrow ०$

- (९) सदा पाद उंचीच्या सांघाने १ प्रोशक (mile) अंतरावर आपातित केलेला कोण काढा.
 (१०) ८० यार्ड (yards) अंतरावर टोळपापाशी २०' चा कोण आपातित करणाऱ्या वाटोची लांबी काढा.

प्रकरण चवथें

त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचें विचरणें (variations)

४०१ घन आणि ऋण रेखा.



आ ४०१

कोण घन किंवा ऋण कसे असूं शकतात हें पहिल्या प्रकरणांत आपण पाहिलें आहे. आता समतलांतील रेखांच्या दिशाहि घन किंवा ऋण कशा असूं शकतात हें आपण पाहू.

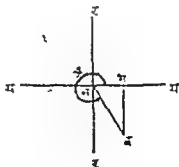
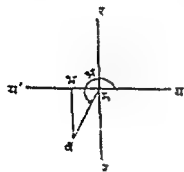
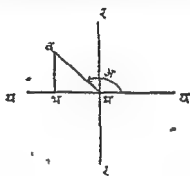
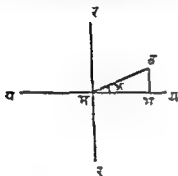
यमय' व रमर' या दोन रेखा एकमेकांस लम्व असून

म बिंदूंत छेदतात. रुढीनुसार, रर' पासून उजवीकडे जाणाऱ्या व य'य ला समान्तर (parallel) असलेल्या सरळ रेखा घन, आणि रर' पासून डावीकडे जाणाऱ्या व यय' ला समान्तर असलेल्या सरळ रेखा ऋण समजल्या जातात. त्याचप्रमाणे र'र ला समांतर व यय' पासून वर जाणाऱ्या

सरळ रेषा घन आणि रर' ला समांतर व यय' पासून खाली जाणाऱ्या रेषा कृण समजल्या जातात.

४.२ कोणत्याहि कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती.

दुसऱ्या प्रकरणांत आपण न्यूनकोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती परिभाषित केल्या. याता आपण कोणत्याहि कोणाच्या



आ. ४.२

यय', रर' हे एकमेकांना लंब असणारे व्यास या वृत्ताचे चार चरणांत विभाग करतात. मय_१, मय_२, मय_३, मय_४, या सदिश त्रिज्येच्या चार चरणांतल्या स्थिती आहेत.

यय' वर य_१म_१, य_२म_२, य_३म_३, य_४म_४, हे लम्ब वाढा.

पहिल्या चरणांत म_१य_१, य_२म_२, या दोन्ही रेखा घन आहेत. म्हणून सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती घन आहेत.

दुसऱ्या चरणांत म_१य_२, घन आहे, पण मम_२, कण आहे. म्हणून ज्या ही, म_१य_२, य_२म_२, या दोन घन राशींची निष्पत्ति असल्यामुळे, घन आहे; परंतु कोटिज्या ही, कण राशि मम_२, य_२ घन राशि मय_२, यांची निष्पत्ति असल्यामुळे, कण आहे. स्पर्शज्या ही, घन राशि म_१य_२, य_२ कण राशि मम_२, यांची निष्पत्ति असल्यामुळे, कण आहे.

तिसऱ्या चरणांत म_१य_३, य_३मम_३, या दोन्ही रेखा कण आहेत. म्हणून ज्या आणि कोटिज्या कण आहेत, पण स्पर्शज्या घन आहे.

चवथ्या चरणांत म_१य_४, कण आहे, पण मम_४, घन आहे. म्हणून ज्या कण आहे, कोटिज्या घन आहे य_४ स्पर्शज्या कण आहे.

ज्याअर्थां व्युत्क्रमज्या ज्येची व्युत्क्रम असते त्याअर्थां कोणत्याहि चरणांत व्युत्क्रमज्येचे चिन्ह ज्येच्या चिन्हाप्रमाणेच असले पाहिजे हे स्पष्ट आहे. तसेच व्युत्क्रमकोटिज्या य कोटिज्या यांची चिन्हे नेहमी समान, आणि कोटिस्पर्शज्या य स्पर्शज्या यांचीहि चिन्हे नेहमी समान असली पाहिजेत.

મદ્યૂન ત્રીજા પ્રમુખ ત્રિકોણમિતીય નિષ્પર્ત્તીર્ચી ચિન્હ માહીત અસદ્યાસ સર્વ ત્રિકોણમિતીય નિષ્પર્ત્તીર્ચી ચિન્હ માહીત હોતાત.

પુઢોલ સારણી લક્ષાંત ટેવલ્યાસ આપણાંસ સર્વ નિષ્પર્ત્તીર્ચી ચિન્હ વાઢતાં યેતીલ.

		૨		
	જ્યા +		જ્યા +	
	કોજ્યા -		કોજ્યા +	
	સ્વ -		સ્વ +	
ય		મ		ય
	જ્યા -		જ્યા -	
	કોજ્યા -		કોજ્યા +	
	સ્વ +		સ્વ -	
		૨		

૪૪ આતા આપણ અર્થ શૂન્યાપાસૂન ૨ વ્યા પર્યંત સતત ત્રિચરણ હોત અસતાંના, હોણારી જ્યા અર્થ ત્રિચરણ અનુરેખં. માગીલ અનુચ્છેદાંતીલ આકૃતિ પદ્ધતિ સમજાત્ર હી વૃત્તાંચી ત્રિજ્યા આદે.

પદ્ધતિ ચરણ:— જ્યા અ = $\frac{મ, ચ,}{૩}$ અ શૂન્યાપાસૂન $\frac{વ્યા}{૨}$

પર્યંત જસજના વાઢતો, તસતશી મ, ચ, શૂન્યાપાસૂન ૩ પર્યંત સતત મોઢી હોત જાતે મદ્યૂન જ્યા અ શૂન્યાપાસૂન ૫૬ પર્યંત સતત વાઢતે.

दुसरा चरण:— ज्या अ = $\frac{म_१य_१}{३}$, जेव्हा अ चें $\frac{प्या}{२}$

पासून प्या पर्यंत विचरण होतं, तेव्हा म_१य_१ ३ पासून शून्यापर्यंत विचरण होतं, तेव्हा म_१य_१ ३ पासून शून्यापर्यंत लहान होते. म्हणून ज्या अ एक पासून शून्यापर्यंत कमी होते.

तिसरा चरण:— ज्या अ = $\frac{म_१य_१}{३}$, अचें जसं प्या

पासून $\frac{३प्या}{२}$ पर्यंत विचरण होतं तशी म_१य_१ शून्यापासून

—३ पर्यंत कमी होते. म्हणून ज्या अ शून्या पासून —१ पर्यंत कमी होते.

चवथा चरण:— ज्या अ = $\frac{म_१य_१}{३}$, अ चें जसं

$\frac{३प्या}{२}$ ते २प्या पर्यंत विचरण होतं तशी म_१य_१ ३ ते

शून्यापर्यंत वाढते. म्हणून ज्या अ —१ पासून शून्यापर्यंत वाढते.

४५ आवर्तीय त्रितें (periodic functions)

सदिश त्रितयेचें एक परिभ्रमण पूर्ण झाल्यावर कोणाचें मान २प्या पासून ४प्या पर्यंत वाढते, अशा वेळीं ज्या त्याच म्हणजे पूर्वावस्थाच विचरण धेर्दीतून जाते. कोणत्याहि दोन कोणांतील फरक ४ लॅम्बकोण म्हणजेच २प्या आर इतका

असल्यास दोन्ही कोणांकरिता सदिश त्रिज्येची स्थिति एकच असेल. म्हणून २ व्या इतका फरक असलेल्या कोणत्याही दोन कोणांची ज्या एकच असेल. यावरून, ज्या हे एक आवर्तीय श्रित आहे व तिचा आवर्तकाल (period) २ व्या आहे हे दिसून येईल. त्याचप्रमाणे सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती आवर्तीय श्रित आहेत आणि, स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या सोडल्यास, सर्वांचा आवर्तकाल २ व्या आहे. स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या यांच्या अर्हा (values) परिभ्रमणरेषेच्या प्रत्येक अर्धभ्रमणानंतर पुनरावृत्त होतात हे लवकरच दिसून येईल. म्हणून स्पर्शज्या व कोटिस्पर्शज्या यांचा आवर्तकाल २ व्या आहे.

४.६ ज्या—त्रिदुरेख (sine graph) किंवा $x = ज्या$ या समीकाराचा त्रिदुरेखा.

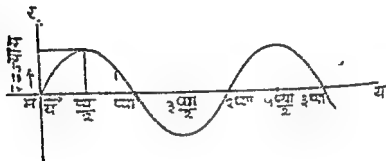
मग व मर या एकमेकांस लंब असणाऱ्या सरळ रेषा म त्रिदुरेख छेदतात. मग वर व आणि मर वर ज्या व च्या संवादी अर्हा मापा. य च्या योग्य अर्हा उदाहरणार्थ

०, $\frac{\pi}{२}$, ३ व्या निघडून आणि ज्या व च्या संवादी अर्हा काढून त्या खालील सारणीच्या रूपांत लिहिल्या आहेत.

य	०	$\frac{\pi}{२}$	π	$\frac{३\pi}{२}$	२व्या	$\frac{५\pi}{२}$	३व्या
ज्या व	०	१	०	-१	०	१	०

य करिता $\frac{r}{2}$ आर $= 2$ शतिमान आपि र किंवा ज्या य

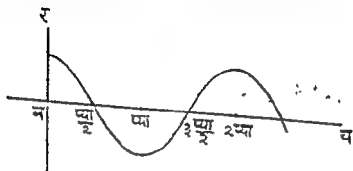
करिता $1 = 1$ शतिमान हें प्रमाण घेऊन, य आणि ज्या य ची संवादी अर्दा, अशा युग्मांमुळे मिळणाऱ्या बिंदूंचें अंकन करा. हे सर्व बिंदू एका सतत (continuous) वक्रावर (curve) आहेत हें दिसून येईल. या वक्रास ज्या-बिंदूरेख किंवा



आ. ४.४

$r =$ ज्या य चा बिंदूरेख म्हणतात. हा बिंदूरेख य आणि ज्या य यांच्या योग्य अर्दा घेतल्यास मय ज्या कृण वाजूसदि पादतां येतो.

૪.૭ ચર દિલ્ચાપ્રમાણેચ ઢ ઑ જેલ્લ્હા શૂન્યાપાત્ન ૨ વ્ચા પર્યંત વિચરણ હોતેં તેલ્લ્હા કોજ્યા ઢ ઑ હોનારીં વિચરણેં કાઢા ચ ર = કોજ્યા ય હા વિદુરેલ્લ કાઢા. -



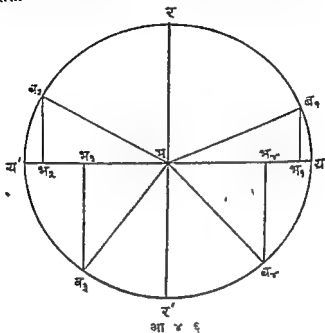
આ. ૪.૫

૪૮ વિદુરેલ્લ આરૂતીત લાલ્લ વિલ્ચાપ્રમાણે લેદેલ્લ.

૪.૮ ઢાના ભાવણ ઢ ઑ જેલ્લ્હા શૂન્યાપાત્ન ૨ વ્ચા પર્યંત વિચરણ હોત ઢલ્લતાંના હોનારીં સ્પ ઢ ઑ વિચરણેં રેલ્લે.

પદિલ્લ ચરણ:— યોંત સ્પ ઢ = $\frac{m_1 y_1}{m_2 m_1}$

अ शून्य असतो तेव्हा m, y , शून्यासमान आणि $m m_1 = 0$ असते.



$$\therefore \text{स्प अ} = \frac{0}{\text{अ}} = 0$$

अ तेव्हा शून्यापासून $\frac{\text{प्या}}{२}$ पर्यंत वाढतो, तेव्हा m, y ,

मध्ये सतत वाढ होते उलट $m m_1$, कमी होते, म्हणून $\frac{m, y_1}{m m_1}$,

अर्थात् स्प अ, सतत वाढन जाते.

$$\text{जेव्हा } अ = \frac{\text{प्या}}{२}, \text{ तेव्हा भ, य, } = \text{त्र व मम, } = ०$$

$$\therefore \text{ स्प अ} = \infty$$

यावरून पहिल्या चरणांत स्पअ शून्यापासून ∞ पर्यंत सतत वाढते हे दिन्तून येईल.

दुसरा चरण:— दुसऱ्या चरणांत अ जेव्हा $\frac{\text{प्या}}{२}$ पासून

प्या पर्यंत वाढतो, तेव्हा भ, य, त्र पासून शून्यापर्यंत कमी होते, उलट मम, क्षण राहून संख्येने शून्यापासून त्र पर्यंत वाढते.

$$\text{आता स्प अ} = \frac{\text{भ, य,}}{\text{मम,}}$$

$$\therefore अ = \frac{\text{प्या}}{२} + \text{उपेक्षणीय अल्पसंख्या असते.}$$

$$\text{तेव्हा स्प अ} = \frac{-\text{त्र}}{०} = -\infty \text{ (जवळजवळ)}$$

आणि, अ = प्या असतो,

$$\text{तेव्हा स्प अ} = \frac{०}{-\text{त्र}} = ०.$$

गहणून स्पष्ट धैजिक रित्या (algebraically) - ∞ पासून शून्यापर्यंत वाढते.

अ $\frac{प्या}{२}$ ही अर्धा घेण्याच्या किंचित् अंगोदर, स्पष्ट घन असून अतिशय मोठी असते. उलट तो $\frac{प्या}{२}$ च्या पुढे सोडासा गेल्याबरोबर स्पष्ट ऋण होऊन संख्येने फार मोठी होते.

यावरून अर्धे विचरण पहिल्या चरणांतून दुसऱ्या चरणांत होत असतां अजेव्हा $\frac{प्या}{२}$ ही अर्धा घेतो तेव्हा स्पष्ट च्या अर्धांत एकाएकी खंड पडतो हें दिसून येईल.

तिसरा चरण:— तिसऱ्या चरणांत म, य, घ मम, या दोन्ही ऋण असतात आणि न, व, संख्येने शून्यापासून अर्धपर्यंत वाढत जाते, उलट मम, संख्येने अर्ध पासून शून्यापर्यंत कमी होते.

गहणून स्पष्ट = $\frac{म, य,}{मम,}$ घन राहून शून्यापासून अनंतापर्यंत वाढते.

चवथा चरण:— चवथ्या चरणांत म, य, ऋण असून संख्येने अर्ध पासून शून्यापर्यंत कमी होते, उलट मम, घन असून शून्यापासून अर्धपर्यंत वाढते.

म्हणून स्प थ $= \frac{म.य.}{मम.}$ वैजिक रित्या $-\infty$ पासून शून्यापर्यंत वाढते.

$\frac{३प्या}{२}$ नून अ जात असतां स्प थ च्या अर्धेच $+\infty$ नून $-\infty$ त एकदम विचरण होतें आणि स्प थ च्या अर्दांत आपणवी एक खंड पडतो.

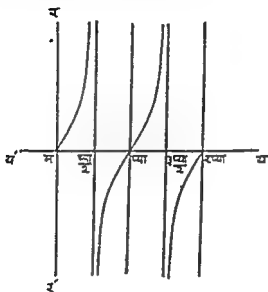
४.८१. स्प थ च्या विंदुरेख किंवा $r = स्प थ$ चा विंदुरेख.

य	०	$\frac{प्या}{२} - ०$	$\frac{प्या}{२} + ०$	१ प्या	$\frac{३प्या}{२} - ०$	$\frac{३प्या}{३} + ०$	२ प्या
स्प थ	०	∞	$-\infty$	०	∞	$-\infty$	०

घरील सारणीत य च्या शून्यापासून २प्या पर्यंत होणाऱ्या परिवर्तनामुळे स्प थ मध्ये होणारी परिवर्तने दिली आहेत. या सारणीवरून दिसून येईल की य चे प्या ते २प्या पर्यंत विचरण होत असतांना येणाऱ्या स्प थ च्या अर्दा न्याचे शून्य ते प्या पर्यंत विचरण होत असतांना येणाऱ्या स्प थ च्या अर्दा-ममान आहेत. म्हणून स्प थ चा आवर्तकाल प्या आहे.

य कोणाच्या महत्ता मय घर निरूपित्या (represented) आहेत. तसेच स्प थ च्या घन अर्दा मर घर य क्रुण अर्दा मर घर निरूपित्या आहेत. या अर्दांच्या माह्याने विंदूचे अंकन करून $r = स्प थ$ चा विंदुरेख आहतीत दाखविल्याप्रमाणे काढतां येतो हा यक्र य च्या २प्या हुन अधिक अर्दांकरिता

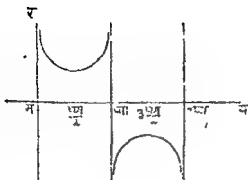
तस्यैव य इया नृण अर्हाकरितांदि यादयितां येतो.



आ ४.७

४.९ व्युत्क्रमज्या विंदुरेख.

' आकृतीत य इया शून्यापासून २ पर्यंतच्या अर्हा घेऊन येणारा २-व्युज्या य चा विंदुरेख दाखविला आहे.



आ. ४.८

उदाहरणें

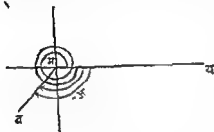
अ दृष्ट्यापासून २ व्या पर्यंत विचरतांना होणारी व्युत्क्रोज्या अ व कोस्प अ चीं विचरणें रेखा च

(१) $r = \text{व्युत्क्रोज्या}$ य आणि

(२) $r = \text{कोस्प}$ य यांचे बिंदु रेखा काढा.

यावरून अशा दोन कोणांच्या सर्व त्रिकोणमितीय निष्पत्ती महत्तंत तसेंच चिन्हांतहि एकच असल्या पाहिजेत.

महणून ३६०° . स + अ आणि अ यांच्या निष्पत्ती एकच असतात.



तसेंच, ३६०° . स - अ
या कोणाच्या निष्पत्ती
य - अ च्या निष्पत्ती
एकच असल्या
पाहिजेत.

आ. ५.२

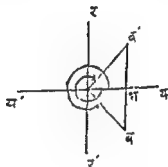
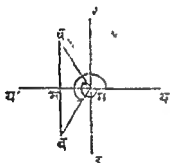
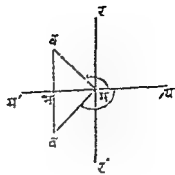
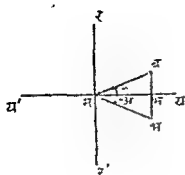
उपसाध्यः— ३६०° च्या य ०° च्या निष्पत्ती एकच असतात.

५.२ अ सें मान कोणतेंहि असतांना, - अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तीच्या रूपांत काढणें.

समजा परिभ्रमणरेषा मय पावून निघून घन दिशेने अ इतका यमय हा कोण रेखिते, तसेंच ऋण दिशेने 'यमय' हा अ इतकाच कोण रेखितें.

$$\therefore \angle \text{यमय}' = - अ$$

मय तील य या कोणत्याहि बिंदूतून मय (या मय') ला यम हा लमय काढा, य हो पाडवून मय' ला य' मधे छेदू द्या.



आ. ५.३

मव च्या चार चरणांतील स्थितीनुसार चार प्रकारच्या आकृत्या काढल्या आहेत.

घमम व व'मम या लंबकोण त्रिकोणांत, मभ रेखा साधारण आहे; व $\angle ममव = \angle ममव'$

म्हणून हे दोन त्रिकोण सर्वांगसम (congruent) आहेत.
 म्हणून चरील चार पैकी प्रत्येक भागृतीत रेषांची चिन्हे
 विचारांत घेतल्यास,

$$\text{भव'} = \text{भव}$$

$$\text{आणि भव'} = -\text{भव}$$

म्हणून, परिभाषेवरून,

$$\text{ज्या}(-\alpha) = \frac{\text{भव'}}{\text{भव}} = \frac{-\text{भव}}{\text{भव}} = -\text{ज्या } \alpha$$

$$\text{य कोज्या}(-\alpha) = \frac{\text{मम}}{\text{मव}} = \frac{\text{मम}}{\text{मव}} = \text{कोज्या } \alpha$$

$$\text{स्प}(-\alpha) = \frac{\text{ज्या}(-\alpha)}{\text{कोज्या}(-\alpha)} = \frac{-\text{ज्या } \alpha}{\text{कोज्या } \alpha} = -\text{स्प } \alpha$$

$$\text{आणि व्युज्या}(-\alpha) = -\text{व्युज्या } \alpha$$

$$\text{व्युत्कोज्या}(-\alpha) = \text{व्युत्कोज्या } \alpha$$

$$\text{कोस्प}(-\alpha) = -\text{कोस्प } \alpha$$

$$\text{उदाहरण— ज्या}(-45^\circ) = -\text{ज्या } 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{स्प}(360^\circ - 30^\circ) = \text{स्प}(-30^\circ) = -\text{स्प } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{कोज्या}(-60^\circ) = \text{कोज्या } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

५.३ धिताची परिभाषा.

कोणतीही पदसंहति (expression) चल (variable) राशि आणि अचल (constant) राशि यांची बनलेली असते. चलराशीच्या निरनिराळ्या अर्हानुसार पदसंहतीची अर्हाहि बदलत जाते. एखाद्या पदसंहतीत य ही चल राशि असल्यास त्या पदसंहतीला य चे थित (function) म्हणतात.

य चे थित थि(य) असे लिहितात. थि(य) या य च्या थितांत य पेचनी - य लिहून त्याची महत्ता घे चिन्ह बदलत नसल्यास त्याला य चे सम (even) थित म्हणतात

थि(य) समथित असल्यास,

$$\text{थि}(-य) = \text{थि}(य)$$

य च्या जागी -य लिहून थि(य) चे चिन्ह बदलत असेल पण त्याची महत्ता पूर्वीइतकीच रहात असेल तर त्याला य चे विषम (odd) थित म्हणतात.

थि(य) विषम थित असल्यास,

$$\text{थि}(-य) = -\text{थि}(य)$$

मागील अनुच्छेदावरून असे दिसून येईल की कोज्या य घ घुज्कोज्या य ही य ची सम थिते असून ज्या य, घुज्ज्या य, स्प य, कोस्प य य ची विषम थिते आहेत

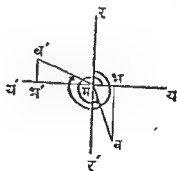
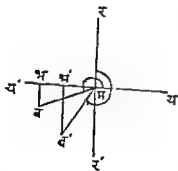
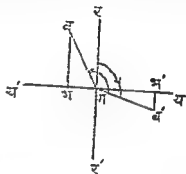
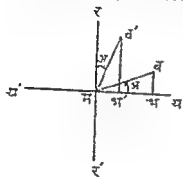
५.४ अ चे मान कोणतीही असतांना, ९०° - अ अथवा $\frac{\pi}{२}$ - अ कोणाच्या थिकोणमितीय निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तीच्या रूपांत काढणे.

मय ही एक परिभ्रमणरेषा यमव हा अ समान कोण रेखिने. मय ही दुसरी परिभ्रमणरेषा मय पासून निघून यमर

हा ९०° चा कोण रेखिते व नंतर रमव = अ हा कोण घटीवत् दिशेने रेखिते.

$$\therefore \angle ymv' = 90^\circ - \alpha$$

मय आणि मय' या रेपांवर म पासून समान अंतरावर अनुक्रमे व आणि व' हे बिंदू घ्या आणि मय (वा मय') ला यम आणि य'म' हे छंद फाढा.



आ. ५४

आता, \angle यमव घ \angle रमय' यांची महत्ता समान आहे.

म्हणून \angle भमव = \angle मर'भ'

शिवाय मर = मर'

म्हणून यमभ घ मर'भ' हे दोन लंबकोण त्रिकोण सर्वांगसम आहेत. म्हणून या दोन त्रिकोणांतील संवादी बाजू समान महत्तेच्या असल्या पाहिजेत.

म्हणून, सर्व आकृत्यांत, चिन्हे विचारांत घेऊन,

भ'व' = मभ,

मभ' = भव,

मर' = मर

म्हणून, परिभाषेनुसार,

ज्या $(90^\circ - \alpha) = ज्या \angle$ यमर' = $\frac{भ'व'}{मव} = \frac{मभ}{मव} = कोज्या \alpha$

कोज्या $(90^\circ - \alpha) = कोज्या \angle$ यमर' = $\frac{मभ'}{मव'} = \frac{मर}{मर'} = ज्या \alpha$

$\therefore \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{ज्या(90^\circ - \alpha)}{कोज्या(90^\circ - \alpha)} = \frac{कोज्या \alpha}{ज्या \alpha} = कोस्य \alpha$

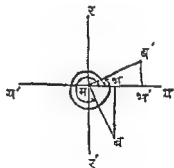
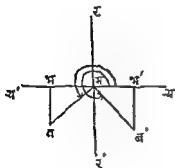
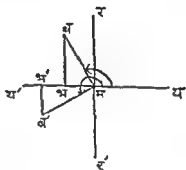
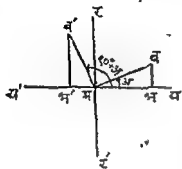
आणि व्युज्या $(90^\circ - \alpha) = व्युत्कोज्या \alpha,$

व्युत्कोज्या $(90^\circ - \alpha) = व्युज्या \alpha,$

कोस्य $(90^\circ - \alpha) = स्पअ$

५.५ अ चे मान कोनतेहि असतांना, $90^\circ + \alpha$ अथवा $\frac{प्या}{२} + \alpha$ कोनाच्या निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तीच्या रूपांत काढणें.

मय' ही परिभ्रमणरेषा मय' पासून निघून यमय हा अ
समान घन कोण रेखिते. नंतर ती त्याच दिशेने एका लंब
कोणाइतकें भ्रमण करून मय' या स्थितीत येते.



आ. ५. ५.

$$\therefore \angle \text{यमय}' = 90^\circ + \alpha$$

मय आणि मय' या रेषांवर म पासून समान अंतरावर

य आणि च' बिंदू च्या च मय (वा मय') ला चम आणि च'म' हे लंब काढा.

आता मभय च मम'च' त्रिकोण सर्वांगसम आहेत, च म्हणून त्यांच्या संचादी याजू समान आहेत.

म्हणून, योग्य चिन्हे घेऊन, चारहि आवृत्त्यांत,

$$मय' = मय,$$

$$म'च' = मम,$$

$$च मम' = -मय$$

$$\therefore ज्या (९०^{\circ} + \theta) = \frac{म'च'}{मय'} = \frac{मम'}{मय} = कोज्या \theta$$

$$कोज्या (९०^{\circ} + \theta) = \frac{मम'}{मय'} = \frac{-मय}{मय} = -ज्या \theta$$

$$\therefore रू (९०^{\circ} + \theta) = \frac{ज्या(९०^{\circ} + \theta)}{कोज्या(९०^{\circ} + \theta)} = \frac{कोज्या \theta}{-ज्या \theta} = -कोरू \theta$$

$$आणि व्युज्या (९०^{\circ} + \theta) = व्युत्कोज्या \theta,$$

$$व्युत्कोज्या (९०^{\circ} + \theta) = -व्युज्या \theta,$$

$$कोरू (९०^{\circ} + \theta) = -रू \theta$$

उदाहरण— १२०° च्या निष्पत्ती काढा.

$$ज्या (१२०^{\circ}) = ज्या(९०^{\circ} + ३०^{\circ}) = कोज्या ३०^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos(120^\circ) &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\sin(120^\circ) = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

१२०° च्या चाकीच्या निष्पत्ती आता लिहितां येतील

५.६ अ चें कोणतेंहि मान असतांना, १८०°-अ अथवा ५-अ कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तीच्या रूपांत काढणें.

५.४ व ५.५ या अनुच्छेदांच्या साहाय्येने आपण १८०°-अ च्या निष्पत्ती काढूं शकतो.

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha) \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \\ &\quad (\text{अनु. ५.१ वरून}) \\ &= \sin \alpha\end{aligned}$$

(अनु. ५.४ वरून)

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \alpha) &= \cos(90^\circ + 90^\circ - \alpha) \\ &= -\sin(90^\circ - \alpha) \\ &\quad (\text{अनु. ५.१ वरून}) \\ &= -\cos \alpha \\ &\quad (\text{अनु. ५.४ वरून})\end{aligned}$$

$$\text{तसेंच, } \sin(180^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha)$$

$$= \sin(90^\circ - \alpha) \\ = -\sin \alpha$$

$$\text{आणि, } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha,$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

अभ्यासः— घरील संबंध वाळति काढून रैखिकाने सिद्ध करा.

उदाहरण १— 180° च्या निष्पत्ती काढा.

$$\sin(180^\circ) = \sin(180^\circ - 0^\circ) = \sin 0^\circ = 0$$

$$\cos(180^\circ) = \cos(180^\circ - 0^\circ) = -\cos 0^\circ = -1$$

$$\sin(180^\circ) = \sin(180^\circ - 0^\circ) = -\sin 0^\circ = 0, \text{ वगैरे.}$$

उदाहरण २— 135° च्या निष्पत्ती काढा.

$$\sin(135^\circ) = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(135^\circ) = \cos(180^\circ - 45^\circ)$$

$$= -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(135^\circ) = \sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -1$$

उदाहरण ३— 150° च्या निष्पत्ती काढा.

$$\sin(150^\circ) = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{कोज्या } (१५०^{\circ}) = \text{कोज्या } (१८०^{\circ} - ३०^{\circ})$$

$$= -\text{कोज्या } ३०^{\circ} = -\frac{३}{२}$$

$$\therefore \text{स्प } (१५०^{\circ}) = \text{स्प } (१८०^{\circ} - ३०^{\circ}) = -\text{स्प } ३०^{\circ} = -\frac{१}{२}$$

टीप— १२०° , १३५° , १५०° च्या निष्पत्ती ५.५ अनुच्छेदानेहि काढतां येतात.

५.७ अर्ध कोणतेंहि मान असतांना, $१८०^{\circ} + \alpha$ अथवा $\pi + \alpha$ कोणाच्या निष्पत्ती अ च्या निष्पत्तीच्या रूपांत काढणें.

या निष्पत्ती ५.५ अनुच्छेदाचा उत्तरोत्तर उपयोग करून काढतां येतात.

$$\text{ज्या } (१८०^{\circ} + \alpha) = \text{ज्या } (९०^{\circ} + \overline{९०^{\circ} + \alpha})$$

$$= \text{कोज्या } (९०^{\circ} + \alpha) = -\text{ज्या } \alpha$$

$$\text{कोज्या } (१८०^{\circ} + \alpha) = \text{कोज्या } (९०^{\circ} + \overline{९०^{\circ} + \alpha})$$

$$= -\text{ज्या } (९०^{\circ} + \alpha) = -\text{कोज्या } \alpha$$

$$\text{स्प } (१८०^{\circ} + \alpha) = \text{स्प } (९०^{\circ} + \overline{९०^{\circ} + \alpha})$$

$$= -\text{कोस्प } (९०^{\circ} + \alpha) = \text{स्प } \alpha$$

$$\text{आणि व्युज्या } (१८०^{\circ} + \alpha) = -\text{व्युज्या } \alpha$$

$$\text{व्युत्कोज्या } (१८०^\circ + \text{अ}) = -\text{व्युत्कोज्या अ}$$

$$\text{कोस्प } (१८०^\circ + \text{अ}) = \text{कोस्प अ}$$

अभ्यासः— $१८०^\circ + \text{अ}$ च्या निष्पत्ती आकृति काढून रेसिकीने पाढा.

५.८ उदाहरण— $२७०^\circ - \text{अ}$ व $२७०^\circ + \text{अ}$ या कोणांच्या निष्पत्ती पाढा.

या कोणांच्या नीन प्रमुख निष्पत्ती पाढल्यास त्याचकून धार्कीच्या निष्पत्ती सहज लिहिता येतील.

$$\begin{aligned} \text{ज्या } (२७०^\circ - \text{अ}) &= \text{ज्या } (१८०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}}) \\ &= -\text{ज्या } (९०^\circ - \text{अ}) = -\text{कोज्या अ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } (२७०^\circ - \text{अ}) &= \text{कोज्या } (१८०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}}) \\ &= -\text{कोज्या } (९०^\circ - \text{अ}) = -\text{ज्या अ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प } (२७०^\circ - \text{अ}) &= \text{स्प } (१८०^\circ + \overline{९०^\circ - \text{अ}}) \\ &= \text{स्प } (९०^\circ - \text{अ}) = \text{कोस्प अ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ज्या } (२७०^\circ + \text{अ}) &= \text{ज्या } (१८०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}}) \\ &= -\text{ज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = -\text{कोज्या अ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } (२७०^\circ + \text{अ}) &= \text{कोज्या } (१८०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}}) \\ &= -\text{कोज्या } (९०^\circ + \text{अ}) = \text{ज्या अ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{स्प } (२७०^\circ + \text{अ}) &= \text{स्प } (१८०^\circ + \overline{९०^\circ + \text{अ}}) \\ &= \text{स्प } (९०^\circ + \text{अ}) = -\text{कोस्प अ} \end{aligned}$$

अन्यथा:—

$$\begin{aligned} \text{ज्या } (२७०^{\circ} - \alpha) &= \text{ज्या } (३६०^{\circ} - ९०^{\circ} - \alpha) \\ &= \text{ज्या } (-९०^{\circ} - \alpha) = -\text{ज्या } (९०^{\circ} + \alpha) = -\text{कोज्या } \alpha \\ &\quad \text{इत्यादि.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } (२७०^{\circ} + \alpha) &= \text{कोज्या } (३६०^{\circ} - ९०^{\circ} + \alpha) \\ &= \text{कोज्या } (-९०^{\circ} + \alpha) \\ &= \text{कोज्या } (९०^{\circ} - \alpha) \\ &= \text{ज्या } \alpha \text{ इत्यादि.} \end{aligned}$$

५.९ आता आपण नमुन्यादाखल कांही उदाहरणें सोडवूं.

उदाहरण १— ज्या (१५६०°) च कोस्प (-४०५°) काढा.

$$\begin{aligned} \text{ज्या } (१५६०^{\circ}) &= \text{ज्या } (४ \times ३६०^{\circ} + १२०^{\circ}) = \text{ज्या } १२०^{\circ} \\ &= \text{ज्या } (१८०^{\circ} - ६०^{\circ}) = \text{ज्या } ६०^{\circ} = \sqrt{३} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{कोस्प } (-४०५^{\circ}) &= -\text{कोस्प } (४०५^{\circ}) \\ &= -\text{कोस्प } (३६०^{\circ} + ४५^{\circ}) \\ &= -\text{कोस्प } ४५^{\circ} = -१ \end{aligned}$$

उदाहरण २—

$$\begin{aligned} &[\text{स्प } ४५^{\circ} + \text{स्प } (\text{प्या} + \alpha)] [\text{कोस्प } ४०५^{\circ} + \text{कोस्प } (\frac{\text{प्या}}{२} + \alpha)] \\ &[\text{कोज्या } \alpha + \text{ज्या } (\text{प्या} - \alpha)] [\text{ज्या } (\frac{\text{प्या}}{२} + \alpha) + \text{ज्या } (\text{प्या} + \alpha)] \end{aligned}$$

यांस सरल रूप धा (simplify) भाणि $\theta = \frac{\pi}{6}$

असल्यास त्याचें मान $\frac{8}{3}$ होतें हें दाखवा.

दिलेली पदसंहति

$$= \frac{(1 + \sin \theta) [\cos \theta (360^\circ + 84^\circ) - \sin \theta]}{(\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta)(\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta)}$$

$$= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}$$

$$1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta \sin \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta \sin \theta} = \csc^2 \theta$$

आता $\theta = \frac{\pi}{6}$ असल्यास,

$$\text{ही पदसंहति} = \text{व्युत्कोज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{६} = \frac{१}{\text{कोज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{६}}$$

$$= \frac{१}{(\sqrt{३})^2} = \frac{१}{३}$$

उदाहरण ३— सिद्ध करा:—

$$\begin{aligned} & \left[\text{ज्या}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right) \right. \\ & \quad + \text{ज्या}^2 \left(\frac{७\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{९\text{प्या}}{१२} \right) \\ & \quad \left. + \text{ज्या}^2 \left(\frac{११\text{प्या}}{१२} \right) \right] = ३ \end{aligned}$$

$$\text{आता ज्या} \left(\frac{११\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\text{प्या} - \frac{\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\text{ज्या} \left(\frac{९\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\text{प्या} - \frac{३\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\text{ज्या} \left(\frac{७\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\text{प्या} - \frac{५\text{प्या}}{१२} \right) = \text{ज्या} \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{इष्टणून वामपक्ष} &= २ \left[\text{ज्या}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{१२} \right) + \text{ज्या}^2 \left(\frac{३\text{प्या}}{१२} \right) \right. \\ & \quad \left. + \text{ज्या}^2 \left(\frac{५\text{प्या}}{१२} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{पण ज्या } \left(\frac{५८५}{१२} \right) = \text{ज्या } \left(\frac{८५}{२} - \frac{८५}{१२} \right)$$

$$= \text{कोज्या } \left(\frac{८५}{१२} \right)$$

$$\therefore \text{वामपक्ष} = २ \left[\left\{ \text{ज्या}^२ \left(\frac{८५}{१२} \right) + \text{कोज्या}^२ \left(\frac{८५}{१२} \right) \right\} \right. \\ \left. + \text{ज्या}^२ \left(\frac{३८५}{१२} \right) \right]$$

$$= २ \left[१ + \text{ज्या}^२ \left(\frac{८५}{४} \right) \right]$$

$$= २ \left[१ + \left(\frac{१}{\sqrt{२}} \right)^२ \right]$$

$$= २ \times \frac{३}{२}$$

$$= ३$$

उदाहरण ४— स कोणताहि पूर्णांक (integer) असल्यास,
कोज्या (स प्या + अ) = $(-१)^अ$ कोज्या अ हे सिद्ध करा.
समजा घ कोणताहि पूर्णांक असून स २घ समान
म्हणजेच एक सम पूर्णांक आहे.

$$\therefore \text{कोज्या (स प्या + अ)} = \text{कोज्या (२ घ प्या + अ)}$$

$$= \cos 360^\circ \text{ घ} + \sin$$

$$= \cos \text{ अ}$$

$$= (-1)^{\text{घ}} \cos \text{ अ}$$

$$= (-1)^{\text{घ}} \cos \text{ अ}$$

आता, स विषम पूर्णांक असून $2\text{घ} + 1$ समान आहे असे समजा.

$$\therefore \cos (\text{स प्या} + \text{अ}) = \cos (2\text{घ} + 1\text{प्या} + \text{अ})$$

$$= \cos (2\text{घ प्या} + \text{प्या} + \text{अ})$$

$$= \cos (\text{प्या} + \text{अ})$$

$$= -\cos \text{ अ}$$

$$= (-1)^{2\text{घ}+1} \cos \text{ अ}$$

$$= (-1)^{\text{घ}} \cos \text{ अ}$$

म्हणून, स कोणताही पूर्णांक असतांना,

$$\cos (\text{स प्या} + \text{अ}) = (-1)^{\text{घ}} \cos \text{ अ}$$

उदाहरणसंग्रह ६

(१) खालील समीकारांचे समाधान करणाऱ्या (satisfy) 0° व 360° मधील अ ज्या जाही करावा.

(क) $\cos \text{ अ} = \frac{1}{2}$; (का) $\sin \cos \text{ अ} = \sqrt{2}$;

(कि) $\sin \text{ अ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

- (२) जर क, ख, ग, घ हे एका वृत्तीय (cyclic) चतुर्भुजाचे (quadrilateral) कोण असतील तर
 $\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख} + \text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = 0$ हे
 सिद्ध करा. (कलकत्ता १८६५)

- (३) सरळ रूप द्या :—

$$\frac{\text{ज्या } (90^\circ - \alpha) \text{ कोज्या } (-\alpha) \text{ स्प } (180^\circ + \alpha)}{[1 + \text{ज्या } (180^\circ - \alpha)][1 - \text{ज्या } (360^\circ + \alpha)] \text{ कोस्प } (90^\circ - \alpha)}$$

सिद्ध करा:—

- (४) ज्या (840°) कोज्या (330°)

$$+ \text{कोज्या } (-240^\circ) \text{ ज्या } (-330^\circ) = \frac{1}{2}$$

- (५) स्प (240°) कोज्या (390°)

$$+ \text{ज्या } (480^\circ) \text{ कोस्प } (-30^\circ) = 0$$

- (६) कोज्या (600°) कोज्या (490°)

$$= \text{ज्या } (240^\circ) \text{ ज्या } (390^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- (७) स्प $\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ व्युत्कोज्या $(-\alpha)$ ज्या $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

$$= \text{कोस्प } (\pi - \alpha) \text{ व्युज्या } \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\times \text{कोज्या } (\pi + \alpha)$$

$$(c) \text{ कोज्या}^4 \frac{\text{प्या}}{20} + \text{कोज्या}^4 \frac{3\text{प्या}}{20} + \text{कोज्या}^4 \frac{5\text{प्या}}{20} + \dots$$

$$\dots + \text{कोज्या}^4 \frac{19\text{प्या}}{20} = 0$$

$$(9) \text{ स्प(प्या + अ) + स्प (2प्या - अ) + स्प (3प्या + अ)}$$

$$+ \text{स्प (4प्या - अ)} \dots \dots + \text{स्प [(2स - 1) प्या + अ]}$$

$$+ \text{स्प (2स प्या - अ)} = 0$$

$$(10) \text{ स विषम पा सम असेल तदनुसार ज्या अ +}$$

$$\text{ज्या(प्या + अ) + ज्या(2प्या + अ) + } \dots \dots \text{स पदांपर्यंत}$$

$$= \text{ज्या अ}$$

$$\text{अथवा} = 0$$

हैं सिद्ध करा.

$$(11) \text{ पुढीलपैकी प्रत्येक पदसंहतीची अर्दा माठ अदि हैं}$$

$$\text{दाखवा.}$$

$$(1) \text{ व्युत्कोज्या}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{8} \right) + \text{व्युत्कोज्या}^2 \left(\frac{3\text{प्या}}{8} \right)$$

$$+ \text{व्युत्कोज्या}^2 \left(\frac{5\text{प्या}}{8} \right) + \text{व्युत्कोज्या}^2 \left(\frac{7\text{प्या}}{8} \right)$$

$$(2) \text{ व्युज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{8} \right) \text{ व्युज्या}^2 \left(\frac{3\text{प्या}}{8} \right) \times$$

$$\text{व्युज्या} \left(\frac{1\text{प्या}}{8} \right) \text{ व्युज्या}^2 \left(\frac{5\text{प्या}}{8} \right)$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \left[\text{व्युत्क्रोज्या} \frac{\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या} \frac{\text{प्या}}{४} + \text{ज्या} \frac{\text{प्या}}{४} \right) \right. \\
 & + \text{व्युत्क्रोज्या} \frac{३\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या} \frac{३\text{प्या}}{४} - \text{ज्या} \frac{३\text{प्या}}{४} \right) \\
 & + \text{व्युत्क्रोज्या} \frac{५\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या} \frac{५\text{प्या}}{४} + \text{ज्या} \frac{५\text{प्या}}{४} \right) \\
 & \left. + \text{व्युत्क्रोज्या} \frac{७\text{प्या}}{४} \left(\text{कोज्या} \frac{७\text{प्या}}{४} - \text{ज्या} \frac{७\text{प्या}}{४} \right) \right]
 \end{aligned}$$

(१२) स एक धन पूर्णांक असल्यास, आणि

$$३ = \frac{\text{प्या}}{२} - (२स - १) \text{ इ असल्यास सिद्ध करा की,}$$

$$\text{स्पइ स्पइइ स्पइइ..... स्प (२स - १) इ} = १$$

प्रकरण सहावं

दिलेली त्रिकोणमितीय निष्पत्ति असलेल्या सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहती

६.१ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचिं दिलेलें मान असणाऱ्या कोणांची संख्या अनन्त असते हें मागील प्रकरणावरून स्पष्टपणें दिसून येईल. उदाहरणार्थ, ज्या $\alpha = \frac{\pi}{2}$ दिली असल्यास, $\alpha = 30^\circ$ किंवा त्याचा श्रुजुपूरक (supplementary) कोण 150° असूं शकतो. याशिवाय हे दोन कोण 360° नो किंवा 360° ज्या अपवर्त्यांनी घाटवून अथवा कमी करून येणाऱ्या कोणांपैकीहि α चें मान असूं शकतें. म्हणून $30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, \dots - 330^\circ, - 210^\circ, \dots$ इत्यादि कोणांची ज्या $\frac{\pi}{2}$ आहे.

इतर निष्पत्तींनाहि गरीब विधान लागू पडेल.

निरनिराळ्या निष्पत्तींच्या मानांच्या ज्या अनंत श्रेंढी (infinite series) येतात त्यांना समाविष्ट करणाऱ्या कांही सामान्य (general) पदसंहती मिळतात काय हें आपण आता पाहूं.

६-२ समजा परिभ्रमणरेषा मय या आदिम स्थितौत

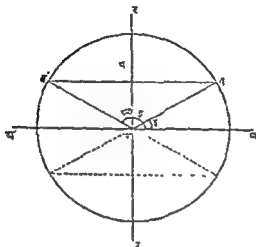
य ————— म ————— य आहे या स्थितौत येतांना
तिचो घन वा ऋण दिशेने ०,

आ : १

किंवा १, किंवा २, किंवा ३, .. इत्यादि पूर्ण परिभ्रमणें झालीं असलीं पाहिजेत. तिने मुळींच भ्रमण केलें नसेल तर तिने रेखिलेला कोण शून्य असतो. तिने घन दिशेने एक परिभ्रमण पूर्ण केलें असल्यास रेखिलेला कोण २ प्या होतो. तेंच भ्रमण ऋण दिशेने झालें असल्यास रेखिलेला कोण -२ प्या होतो. तिने दोन परिभ्रमणें पूर्ण केलीं असल्यास प्रतिघटीयत् वा घटीयत् भ्रमण असेल त्याप्रमाणे रेखिलेला कोण ४ प्या किंवा -४ प्या इतका होतो. म्हणून परिभ्रमण रेषा मय या स्थितौत वसते ते-हां तिने रेखिलेला कोण ०, किंवा ± २ प्या, किंवा ± ४ प्या, किंवा ± ६ प्या, .. वसतो. स, शून्य किंवा कोणताहि घन वा ऋण पूर्णांक असल्यास ह् सस्र कोण रसप्या या एकाच व्यंजकानें (expression) दर्शविता येतात.

मय' या स्थितौत येण्याकरिता परिभ्रमण रेषेला प्रथम कांही पूर्ण परिभ्रमणें करून मय या स्थितौत याचें लागतें, आणि नंतर घन वा ऋण दिशेने अर्धपरिभ्रमण करावें लागतें म्हणून परिभ्रमणरेषा जेव्हा मय'शीं संपाती होते ते-हां तिने रेखिलेला कोण रसप्या + प्या किंवा रसप्या - प्या म्हणजेच $(रस \pm १)$ प्या इतका असतो.

६.३ दिलेली ज्या असणारा अल्पष्ट (least) धन कोण रचणें व एकच ज्या असणारे सर्व कोण समाविष्ट करणारी सामान्य पदसंहति काढणें.



अ. ६ २

समजा एकाच कोणाची ज्या 'क' समान दिली आहे. यथ 'क' र' या म विदूत छेदणाऱ्या आणि एकमेकांना लंब असणाऱ्या रेखा र'या. म केन्द्र घेऊन १ ही त्रिज्या असलेले वृत्त काढा. मर वर (किंवा क' आणि असल्यास मर'वर) मप=१२ मापा. प मधून क'पर्यंत ही सरळ रेखा क'मप ला समान्तर काढून वृक्षास क' आणि क' या विदूत छेदू द्या.

कोण यमय इने दर्शवा.

$$\text{आता, ज्या इ} = \text{ज्या मयप} = \frac{\text{मप}}{\text{मय}} = \frac{\text{ध}}{१} = \text{ध.}$$

∴ इ हा दिलेली ज्या अमणारा आस्पष्ट कोण आहे.

ध ही ज्या असलेला \angle यमय' = धा - इ हा आणखीहि एक कोण आहे हे आकृतीवरून स्पष्टपणे दिसून येईल.

'क्ष'ची मदत्ता व चिन्ह दिले असल्यामुळे प च र' मर घरील स्थान स्थिर आहे. म्हणून परिभ्रमणरेषा शून्यापासून २ व्या पर्यंत जाऊ असतां दिलेली ज्या असणारे, इ व धा - इ, हे दोनच कोण ती रेखाटते हे आकृतीवरून सहज दिसून येईल.

म्हणजे, परिभ्रमणरेषा जेव्हा मय या मय' यांपैकी कोणत्यातरी एका स्थितीत असते, व दुसऱ्या कोणत्याहि स्थितीत नसते, तेव्हाच तिने रेखिलेल्या कोणाची ज्या दिलेल्या मानादत्तकी (म्हणजे १ इतकी) असते (५६ अनुच्छेदादि पदा)

आता परिभ्रमणरेषेची स्थिति मय असते तेव्हा तिने कोणत्याहि पूर्ण संख्येइतकी परिभ्रमण पूर्ण करून नंतर इ हा कोण रेखिलेला असतो. म्हणजे, मागील अनुच्छेदानुसार, घ शून्य किंवा धन या क्रम पूर्णांक असल्यास, तिने रेखिलेला कोण

$$२ घ धा + इ \dots \dots \dots (१)$$

इतका असतो.

तसेच परिभ्रमणरेषा मय' या स्थितीत असते तेव्हा तिने रेखिलेला कोण, (घ शून्य किंवा कोणताहि धन या क्रम पूर्णांक असल्यास),

२ध प्या + (प्या - ६) म्हणजेच (२ध + १)प्या - ६... (२)
इतका असतो.

आता स गून्य किंवा कोणताहि धन या ऋण पूर्णांक
असल्यास, घरील कोणांचे दोन्ही संच,

$$स प्या + (-१)^8 इ (३)$$

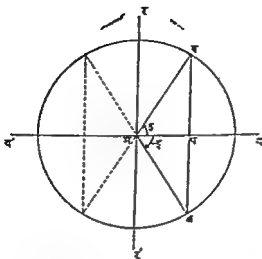
या पदसंहतीत समाविष्ट होतात.

कारण, $(-१)^{१५} = +१$, म्हणून स २ध समान असतो
तेव्हा (३) चें रूपांतर २धप्या + ६ अर्थात् पदसंहति (१) मधे
होते.

आणि $(-१)^{१५+१} = -१$, म्हणून स २ध + १ समान
असतो तेव्हा (३) चें रूपांतर (२ध + १) प्या - ६ अर्थात् पद-
संहति (२) मधे होते.

उपसाध्यः—एकच ज्या असणाऱ्या सर्व कोणांची
व्युत्क्रमज्याहि एकच असते, म्हणून पदसंहति (३) मधे इ ज्या
व्युत्क्रमज्येइतकी व्युत्क्रमज्या असणारे सर्व कोण समाविष्ट
होतात.

६.४ दिलेली कोटिज्या असणारा अल्पिष्ठ धन कोण
रचणें प एकच कोटिज्या असणाऱ्या सर्व कोणांकरिता
सामान्य पदसंहति काढणें.



आ १.३

समजा दिलेली कोटिज्या 'क्ष' आहे.

म मध्ये छेदणाऱ्या य'मय आणि र'मर या दोन लंब रेषा घ्या.

मय वर (किंवा 'क्ष' ऋण असल्यास मय' वर) मप = क्ष मापा प नून य'पय, र'मर ला समांतर काढा आणि तिला, म हे केंद्र व १ ही त्रिज्या असलेल्या वृत्तास, य आणि य' मध्ये छेदू घ्या.

कोण यमय इ ने दर्शवा.

पहिल्या चरणांत इ आणि -इ हेच कोण केवळ असे आहेत की ज्यांची कोटिज्या दिलेल्या कोटिज्येइतकी (म्हणजे 'क्ष') आहे हे आकृतीवरून दिसून येईल.

म्हणून, परिभ्रमणरेषा मय वा मय' या स्थितीत असते च दुसऱ्या कोणत्याहि स्थितीत नसते, तेव्हांच तिने रेखिलेल्या कोणाची कोटिज्या दिलेल्या कोटिज्येइतकी असते.

(५.२ अनुच्छेदहि पहा.)

परिभ्रमणरेषा मय या स्थितीत असते तेव्हां तिने कोणत्याहि पूर्ण संख्येइतकी परिभ्रमणें पूर्ण करून नंतर इ हा कोण रेखिलेला असतो; म्हणजे, स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास, तिने रेखिलेला कोण

२सप्या + इ

इतका असतो.

परिभ्रमणरेषा मय' या स्थितीत असते तेव्हां तिने कोणत्याहि पूर्ण संख्येइतकी परिभ्रमणें पूर्ण करून नंतर -इ कोण रेखिलेला असतो, म्हणजे तिने

२सप्या - इ

हा कोण रेखिलेला असतो.

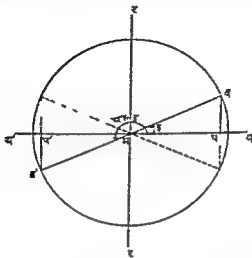
स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असेल तर हे सर्व कोण

२सप्या ± इ.....(१)

या पदसंहतीत समाविष्ट होतात.

उपसाध्यः— ज्या कोणांची व्युत्क्रमकोटिज्या इ च्या व्युत्क्रमकोटिज्येइतकी आहे असे सर्व कोण पदसंहति (१) मध्ये समाविष्ट होतात.

६.५ दिलेली स्पर्शज्या असणारा अल्पष्ट धन कोण रचणें व एकच स्पर्शज्या असणाऱ्या सर्व कोणाकरिता सामान्य पदसंहति काढणें.



आ १४

समजा 'क्ष' हें दिलेल्या स्पर्शज्येचें मान आहे. च'मय आणि र'मर या म मध्ये छेदणाऱ्या आणि एकमेकांना लघु असणाऱ्या रेषा ध्या मय चर मय = १ माया च नंतर तिला पय हा लम्ब काढून पय = क्ष ध्या मय पय = १, समजा हा इष्ट कोण होय

म हें फे.ट्र च मय ही त्रिज्या घेऊन घृत्त काढा यम काढून तिला घृत्तास व' मध्ये मिळेल्या मय' चर प'प' लम्ब

काढा. मग \angle यमय' = ज्या + इ या कोणाचीहि स्पर्शज्या तित-
कीच म्हणजे 'इ' आहे.

परिभ्रमणरेषा जेव्हां मय किंवा मय' या स्थितीत असते,
व दुसऱ्या कोणत्याहि स्थितीत नसते तेव्हांच रेखिलेल्या
कोणाची स्पर्शज्या दिलेल्या स्पर्शज्येइतकी असते.

(५७ अनुच्छेदाहि पदा.)

ती मय शी संपाती होते तेव्हां, घ शून्य किंवा कोण-
ताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास, तिने रेखिलेला कोण
२घ ज्या + इ असतो.

ती मय' च्या स्थितीत असते तेव्हां तिने रेखिलेला कोण
२ घ ज्या + (ज्या + इ) म्हणजे (२ घ + १) ज्या + इ असतो.

स शून्य किंवा कोणताहि धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास
घरील कोणांचे दोन्ही संच

स ज्या + इ (१)

या पदसंहतीत समाविष्ट होतात.

उपसाध्यः— ज्या कोणांची कोटिस्पर्शज्या इ च्या
कोटिस्पर्शज्येइतकी आहे अशा सर्व कोणांचा समावेश पद-
संहति (१) मध्ये होतो.

६६ निदर्शनात्मक (illustrative) उदाहरणें.

उदाहरण १. (१) ज्यांची ज्या $\frac{1}{2}$ समान आहे,

(२) ज्यांची कोटिज्या $\frac{\sqrt{3}}{2}$ समान आहे,

(३) ज्यांची स्पर्शज्या $\sqrt{3}$ समान आहे,

अशा सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहती लिहा.

(१) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ समान ज्या असणारा अल्पष्ट कोण 45°

म्हणजेच $\frac{5\pi}{8}$ आहे.

म्हणून ६३ या अनुच्छेदानुसार, ज्या कोणाची ज्या

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ आहे अशा सर्व कोणांची सामान्य पदसंहति

$$s \text{ ज्या } + (-1)^s \frac{\pi}{8}$$

आहे.

(२) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ही कोटिज्या असणारा अल्पष्ट घन कोण

150° म्हणजेच $\frac{5\pi}{6}$ आहे.

म्हणून ६४ या अनुच्छेदानुसार, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ही कोटिज्या

असणाऱ्या सर्व कोणांची सामान्य पदसंहति

$$2s \text{ ज्या } + \frac{5\pi}{6}$$

आहे

(३) $\sqrt{2}$ ही स्पर्शज्या असणारा अल्पिष्ठ धन कोण 60° म्हणजेच $\frac{\pi}{3}$ आहे. म्हणून 6.4 या अनुच्छेदानुसार,
 $\sqrt{2}$ ही स्पर्शज्या असलेल्या सर्व कोणांची सामान्य पदसहति,

$$स \pi + \frac{\pi}{3}$$

आहे.

उदाहरण २ ज्या $x = \frac{1}{2}$ हा समीकार सोडवा व
 अर्ध सामान्यतम (most general) गरी काढा.

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

वरचे चिन्ह घेतल्यास,

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$x = स \pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

खालचे चिन्ह घेतल्यास,

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore x = s' \text{प्या} + (-1)^n \left(-\frac{\text{प्या}}{3} \right)$$

ही दोन्ही फलें (solutions) एकत्र करून,

$$x = s' \text{प्या} + \frac{\text{प्या}}{3}$$

उदाहरण ३. कोज्या $x = \frac{1}{2}$ व स्पत्र $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$ या दोन्ही समीकारांचें समाधान करणारी x ची सामान्यतम अर्हा काढा.

0° व 360° मधें असणाऱ्या व कोज्या $x = \frac{1}{2}$ चें समाधान करणाऱ्या x च्या अर्हा 30° व 330° या आहेत.

तसेंच, स्प $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ चें समाधान करणाऱ्या x च्या

0° व 360° मधील अर्हा 150° व 210° या आहेत.

म्हणून 0° व 360° मधें असणारी व दोन्ही समीकारांचें समाधान करणारी x ची अर्हा केवळ 330° म्हणजेच $\frac{11\pi}{6}$ आहे.

या कोणाचा चार लम्बकोणांच्या कोणत्याहि अपवर्त्याशी योग केल्यास सामान्यतम अर्हा मिळेल.

म्हणून $2s' \text{प्या} + \frac{11\pi}{6}$ हीच इष्ट अर्हा होय.

उदाहरणसंग्रह ७

गालील समीकारांचें समाधान करणाऱ्या अ च्या सामान्यतम अर्हा काढा.

- (१) ज्या $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (२) कोज्या $x = 0$
 (३) कोस्प $x = -1$ (४) व्युत्कोज्या^३ $x = 4$
 (५) स्प^३ $x = 1$ (६) ४ व्युत्कोज्या^३ x

$$- ७स्प^३ $x = 3$$$

(७) स कोणताहि पूर्णांक भमल्यास,

$$(२स-१)\frac{प्या}{२} + (-१)^स \frac{प्या}{३} व २स प्या \pm \frac{प्या}{४}$$

ही दोन्ही सूत्रे एकच कोण दर्शवितात हें सिद्ध करा.

$$(८) स प्या + (-१)^स (प्या - ३) व$$

$(२स प्या \pm ३\frac{प्या}{२} - \frac{प्या}{३}) \pm ३$ ही दोन्ही सूत्रे एकच कोण दर्शवितात हें सिद्ध करा.

(९) कोस्प $x = 1$ व ज्या $x = \frac{1}{2}$ या दोन्ही समीकारांचें समाधान करणारी अ ची सामान्यतम अर्हा काढा.

$$(१०) स्पमम कोस्पनम + स्प\frac{प्या}{४} कोस्प\frac{३प्या}{४} = ०$$

चें समाधान करणाऱ्या अच्या अर्हा एक समान्तर श्रेढी निर्माण करतात हें सिद्ध करा आणि तिचा प्रचय (common difference) काढा

६७ त्या समीकारात एक किंवा अनेक अज्ञात कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती असतात त्या समीकाराला त्रिकोणमितीय समीकार म्हणतात

याही सोपे त्रिकोणमितीय समीकार ग्वाली सोडविले जावेत

उदाहरण १ \circ कोज्या^२अ + $\sqrt{२}$ ज्या अ = २ हा समीकार सोडवा

[फलफत्ता १९०२]

दिलेला समीकार पुढीलप्रमाणेहि लिहिता येतो

$$२ (१ - ज्या^२ अ) + \sqrt{२} ज्या अ = २$$

$$किंवा २ - २ज्या^२ अ + \sqrt{२} ज्या अ = २$$

$$\sqrt{२} ज्या अ (१ - \sqrt{२} ज्या अ) = ०$$

$$म्हणून, एकतर ज्या अ = ० \quad (१)$$

$$किंवा १ - \sqrt{२} ज्या अ = ० \quad (२)$$

(१)वरून,

$$ज्या अ = ० = ज्या ०$$

अ = स ज्या ही एक सामान्य अर्हा आहे

(२)वरून,

$$ज्या अ = \frac{१}{\sqrt{२}} = ज्या ४$$

$\therefore x = \frac{\sin A}{2} + (-1)^n \frac{\sin A}{2}$ ही दुसरी सामान्य

अर्हा आहे.

उदाहरण २. $\sin x = \cos x$ त x हा समीकार सोडवा.

$\sin x = \cos x$ त x

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

म्हणून, $\sin x$ किंवा कोणताही धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास,

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi$$

$$\text{किंवा, } x = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{(1+1)}$$

उदाहरणसंग्रह ८

पुढील समीकार सोडवा :—

$$(1) \sin^2 x + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cos x = 0$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2} \right) = 0$$

$$(2) \sin^2 x + \cos^2 x = 2 \cos x$$

(कलकत्ता १९०८)

$$(३) २ \sin^2 \theta = ७ - ३ \cos^2 \theta \quad (\text{नागपुर १९३९})$$

$$(४) \sqrt{३} - \cos \theta \sin \theta = \sqrt{३} \cos^2 \theta$$

$$(५) \cos ७^\circ \sin \theta = \cos ३^\circ \sin \theta$$

$$(६) \cos^2 \theta \sin \theta = \cos \theta \sin \theta$$

$$(७) \cos \theta \sin \theta = \cos \theta \frac{1}{\sin \theta}$$

$$(८) \sin (\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ व } \cos (\theta - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$$

$$(९) \cos (\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ व } \therefore$$

$$\cos (\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$$

(१०) क $\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$ हा समीकरण सोडवा
य जर $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$ असेल तर $\sin \theta$ या दोन मर्दा समान
होतात हे दाखवा. (फलक १८८२)

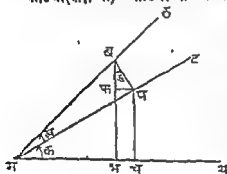
प्रकरण सातवें

योग आणि वियोग प्रमेयें. गुणनसूत्रें.

७.१ योग प्रमेयें (addition theorems).

ज्या(क + ख) = ज्याक कोज्या ख + कोज्या क ज्या ख

कोज्या(क + ख) = कोज्या क कोज्या ख - ज्या क ज्या ख



मय पासून तिघालेली
परिभ्रमणरेषा क
समान यमट हा कोण
करून नंतर ख
समान टमट हा
कोण रेखिते.

शा ७-१

$$\therefore \angle यमट = \angle यमट + \angle टमट$$

$$= क + ख$$

मट या मर्यादारेषेवर (bounding line) व हा एक
विंदु, ज्या आणि मय व मट वर अनुक्रमे यम व यप हे लम्ब

काढा. प पातून मय व वम वर अनुक्रमे पच व पफ हे लम्ब काढा.

\angle मभव व \angle मपव लम्बद्वारे असल्यामुळे म, भ, प, व हे बिंदू संवृत्तीय (concyelic) आहेत.

आता पवम आणि पमम हे कोण एकाच खंडांत (segment) असल्यामुळे,

$$\angle पवम = \angle पमम = क$$

$$\text{अर्थात् } \angle पवफ = क$$

$$\begin{aligned} \text{आता, ज्या (क + ख)} &= \text{ज्या यमठ} \\ &= \frac{\text{भव}}{\text{मव}} = \frac{\text{भफ} + \text{फव}}{\text{मव}} \end{aligned}$$

पफमच आयत (rectangle) आहे;

$$\text{म्हणून भफ} = \text{चप}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ज्या (क + ख)} &= \frac{\text{चप}}{\text{मव}} + \frac{\text{फव}}{\text{मव}} \\ &= \frac{\text{चप}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} + \frac{\text{फव}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}} \end{aligned}$$

आठ्तीयरून क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तींचा आणि $\angle पवफ = क$ याचा उपयोग करून,

$$\text{ज्या (क + ख)} = \text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}$$

$$\begin{aligned} \text{पुन्हा कोज्या (क + ख)} &= \frac{\text{मम}}{\text{मव}} \\ &= \frac{\text{मच} - \text{भच}}{\text{मव}} \end{aligned}$$

पकभच आयत असल्यामुळे भच = फप

$$\therefore \text{कोऱ्या (क + ख)} = \frac{\text{मच}}{\text{मव}} - \frac{\text{फप}}{\text{मव}}$$

$$= \frac{\text{मच}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मव}} - \frac{\text{फप}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मव}}$$

क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती आणि \angle पक्क = क याचा उपयोग करून,

$$\text{कोऱ्या (क + ख)} = \text{कोऱ्या क कोऱ्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}$$

७.११ भागील अनुच्छेदाच्या आकृतीत क आणि ख हे दोन्ही कोण घन आणि न्यून काढले आहेत. परंतु या कोणांचे परिमाण कांहीहि असले तरी घर दिलेल्या सिद्धतेतील राशींच्या चिन्हांकडे योग्य लक्ष दिव्यास तीच सिद्धता सर्व प्रकारांत लागू पडेल.

वरील प्रमेये कोणांचे परिमाण कांहीहि असले तरी सत्य आहेत हे पुढे दिल्याप्रमाणेहि दाखविता येते.

प्रथम क व ख हे दोन्ही कोण न्यून आहेत असे समजा. म्हणजे वरील प्रमेये सत्य राहतील.

$$\text{आता क}_1 = ९०^\circ + \text{क}$$

$$\text{व ख}_1 = \text{ख ज्या.}$$

$$\text{ज्या (क}_1 + \text{ख}_1) = \text{ज्या}(९०^\circ + \text{क} + \text{ख}) = \text{कोऱ्या(क + ख)}$$

$$= \text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}$$

(७.१ अनुच्छेदाने)

$$\text{परंतु ज्या } (९०^{\circ} + क) = \text{कोज्या क}$$

$$\text{आणि कोज्या } (९०^{\circ} + क) = -\text{ज्या क}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ज्या } (क, + ख,) &= \text{ज्या } (९०^{\circ} + क) \text{ कोज्या ख} \\ &\quad + \text{कोज्या } (९०^{\circ} + क) \text{ ज्या ख} \\ &= \text{ज्या क, कोज्या ख,} + \text{कोज्या क, ज्या ख,} \\ &\quad \dots\dots\dots(१) \end{aligned}$$

तसेच,

$$\begin{aligned} \text{कोज्या } (क, + ख,) &= \text{कोज्या } (९०^{\circ} + क + ख) \\ &= -\text{ज्या } (क + ख) \\ &= -\text{ज्या क कोज्या ख} \\ &\quad - \text{कोज्या क ज्या ख} \\ &\quad \text{(७.१ अनुच्छेदाने)} \\ &= \text{कोज्या } (९०^{\circ} + क) \text{ कोज्या ख} \\ &\quad - \text{ज्या } (९०^{\circ} + क) \text{ ज्या ख} \\ &= \text{कोज्या क, कोज्या ख,} \\ &\quad - \text{ज्या क, ज्या ख,} \\ &\quad \dots\dots\dots(२) \end{aligned}$$

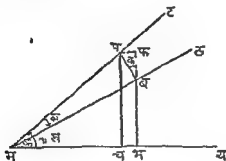
ख, , ख समान असण्याऐवजी, $९०^{\circ} + ख$ समान असला तरी घर दिल्याप्रमाणेच रीत लागू पडेल.

(१) व (२) या सर्वथांवरून असे दिसून येईल की क आणि ख कोण ९०° ने वाढविले तरी योगप्रमेये सत्य राहतात.

त्याचप्रमाणे क, $= ९०^{\circ} + क$, घेऊन, क आणि ख कोण ०° आणि २७०° मध्ये असल्यास योग प्रमेयांची सत्यता दाखविता येईल.

अशाच रीतीचा अवलंब केला असतां घरील योगप्रमेयें, कोणांच्या कितीहि महत्ता असल्या तरी सत्य राहतात हें दिसून येईल.

७२ वियोग प्रमेयें (subtraction theorems).
ज्या (क-ख) = ज्या क कोज्या ख - कोज्या क ज्या ख
कोज्या (क-ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्याक ज्याख



आ ७२

परिभ्रमणेपा मय पासून निघून क समान यमट हा कोण रेखिते आणि नंतर ख कोणाइतकें घटीवत् भ्रमण करून मठ या स्थितीत येते.

$$\begin{aligned} \text{तेव्हां } \angle \text{यमठ} &= \angle \text{यमट} - \angle \text{टमठ} \\ &= \text{क} - \text{ख} \end{aligned}$$

मठ या मर्यादारेपेवर व हा एक बिंदु घेऊन मय व मट वर अनुक्रमें वम व वप हे लम्ब काढा. प बिंदूतून मय ला पच लम्ब काढा व मय वाढवून तिळा पफ हा लम्ब काढा.

$$\text{आता } \angle \text{ममर} + \angle \text{मपव} = 180^\circ$$

∴ ममरप हा चक्रीय (cyclic) चौरकोण आहे.

$$\therefore \angle \text{परफ} = \angle \text{ममप} = क$$

$$\text{आता ज्या } (क - ख) = \frac{\text{मर}}{\text{मर}} = \frac{\text{भफ} - \text{यफ}}{\text{मर}}$$

पफमच आयत आहे. म्हणून भफ = चप

$$\begin{aligned} \therefore \text{ज्या } (क - ख) &= \frac{\text{चप}}{\text{मर}} - \frac{\text{यफ}}{\text{मर}} \\ &= \frac{\text{चप}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मर}} - \frac{\text{यफ}}{\text{वप}} \cdot \frac{\text{यप}}{\text{मर}} \end{aligned}$$

आकृतीवरून क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीप निष्पत्ती आणि $\angle \text{परफ} = क$ याचा उपयोग करून,

$$\text{ज्या } (क - ख) = \text{ज्या क को ज्या ख} - \text{को ज्या क ज्या ख}$$

$$\begin{aligned} \text{पुन्हा को ज्या } (क - ख) &= \frac{\text{मम}}{\text{मर}} \\ &= \frac{\text{मच} + \text{चम}}{\text{मर}} \end{aligned}$$

पफमच आयत असल्यामुळे चम = पफ

$$\begin{aligned} \text{को ज्या } (क - ख) &= \frac{\text{मच}}{\text{मर}} + \frac{\text{पफ}}{\text{मर}} \\ &= \frac{\text{मच}}{\text{मप}} \cdot \frac{\text{मप}}{\text{मर}} + \frac{\text{पफ}}{\text{पव}} \cdot \frac{\text{पव}}{\text{मर}} \end{aligned}$$

आकृतीवरून क आणि ख कोणांच्या त्रिकोणमितीय
 निष्पत्ती आणि \angle पत्रफ = क यांचा उपयोग करून,
 कोज्या (क - ख) = कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख
 अभ्यास :- ७.११ अनुच्छेदांत दर्शविल्याप्रमाणे वरील
 सिद्धता, कोणांची महत्ता कांहीही असली तरी लागू पडते हे
 सिद्ध करा.

$$७.२ \quad (१) \text{ स्प (क + ख) } = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$$

$$\text{आणि (२) स्प (क - ख) } = \frac{\text{स्प क} - \text{स्प ख}}{१ + \text{स्प क स्प ख}}$$

हे सिद्ध करणें.

$$\begin{aligned} \text{स्प (क + ख)} &= \frac{\text{ज्या (क + ख)}}{\text{कोज्या (क + ख)}} \\ &= \frac{\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}}{\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}} \end{aligned}$$

आता, अंश व हर यांना कोज्या क कोज्या ख ने भागून,

$$\begin{aligned} \text{स्प (क + ख)} &= \frac{\frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} + \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}}{१ - \frac{\text{ज्या क}}{\text{कोज्या क}} \times \frac{\text{ज्या ख}}{\text{कोज्या ख}}} \end{aligned}$$

$$\text{म्हणून स्प (क + ख) } = \frac{\text{स्प क} + \text{स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}}$$

$$\text{पुन्हा स्प (क - ख) } = \frac{\text{ज्या (क - ख)}}{\text{कोज्या (क - ख)}}$$

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\
 &= 2 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

आता, 74° च 14° हे लंगूरक कोण आहेत म्हणून 14° च्या निष्पत्ती 74° च्या निष्पत्तीवरून लिहिता येतात.

$$\text{ज्या } 14^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{कोज्या } 14^\circ = \text{ज्या } 74^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{रूप } 14^\circ = \text{कोरूप } 74^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

वियोगप्रमेयांचा ($44^\circ - 30^\circ$) करिता उपयोग करू नहि 14° च्या निष्पत्ती वाढता येतात

उदाहरण २. योगप्रमेयें गृहीत धरून वियोगप्रमेयें काढा.

$$\text{ज्या } (क + ख) = \text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}$$

$$\text{कोज्या } (क + ख) = \text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}$$

$$\text{आणि रूप } (क + ख) = \frac{\text{रूप क} + \text{रूप ख}}{1 - \text{रूप क रूप ख}}$$

यांपैकी प्रत्येकांत ख च्या जागीं — ख लिहा.

$$\begin{aligned}
 ज्या (क - ख) &= ज्या क कोज्या (-ख) \\
 &\quad + कोज्या क ज्या (-ख) \\
 &= ज्या क कोज्या ख \\
 &\quad - कोज्या क ज्या ख \\
 &\quad (५.२ अनुच्छेदाने)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 तसैच, कोज्या (क - ख) &= कोज्या क कोज्या (-ख) \\
 &\quad - ज्या क ज्या (-ख) \\
 &= कोज्या क कोज्या ख + ज्या क ज्या ख \\
 धाणि स्प (क - ख) &= \frac{स्प क + स्प (-ख)}{१ - स्प क स्प (-ख)} \\
 &= \frac{स्प क - स्प ख}{१ + स्प क स्प ख}
 \end{aligned}$$

याच रीतीने आपणांत वियोगप्रमेयांचरून योगप्रमेयें काढतां येतील.

उदाहरण ३. योग व वियोग प्रमेयांचा उपयोग करून ५ व्या प्रकरणांतील कोणताहि संबंध काढतां येतो.

$$\begin{aligned}
 उदाहरणार्थ, ज्या (-अ) &= ज्या (० - अ) \\
 &= ज्या ० कोज्या अ - कोज्या ० ज्या अ \\
 &\quad (७.२ अनुच्छेदाने) \\
 &= ० कोज्या अ - १. ज्या अ \\
 &= - ज्या अ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ज्या (९०^\circ + अ) &= ज्या ९०^\circ कोज्या अ + कोज्या ९०^\circ ज्या अ \\
 &\quad (७.१ अनुच्छेदाने) \\
 &= १. कोज्या अ + ०. ज्या अ \\
 &= कोज्या अ
 \end{aligned}$$

$$\text{रस (व्या - अ)} = \frac{\text{अव्या - रस अ}}{1 + \text{रस व्या रस अ}}$$

(७.३ अनुच्छेदने)

$$= \frac{0 - \text{रस अ}}{1 + 0. \text{रस अ}}$$

$$= - \text{रस अ}$$

$$\text{कोज्या (व्या + अ)} = \text{कोज्या व्या कोज्या अ} - \text{ज्या व्या ज्या अ}$$

(७.१ अनुच्छेदने)

$$= - 1. \text{कोज्या अ} - 0. \text{ज्या अ}$$

$$= - \text{कोज्या अ}$$

उदाहरण ४. सिद्ध करा:—

$$\text{कोज्या (क + ख) कोज्या (क - ख)} = \text{कोज्या}^2 \text{क} - \text{ज्या}^2 \text{ख}$$

$$\text{याणि ज्या (क + ख) ज्या (क - ख)} = \text{कोज्या}^2 \text{क} - \text{कोज्या}^2 \text{ख}$$

७.१ घ ७.२ या अनुच्छेदांवरून,

$$\text{कोज्या (क + ख) कोज्या (क - ख)}$$

$$= (\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}) \times$$

$$(\text{कोज्या क कोज्या ख} + \text{ज्या क ज्या ख})$$

$$= \text{कोज्या}^2 \text{क कोज्या}^2 \text{ख} - \text{ज्या}^2 \text{क ज्या}^2 \text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^2 \text{क} (1 - \text{ज्या}^2 \text{ख}) - (1 - \text{कोज्या}^2 \text{क}) \text{ज्या}^2 \text{ख}$$

$$= \text{कोज्या}^2 \text{क} - \text{ज्या}^2 \text{ख}$$

स्याच अनुच्छेदांतरान्,

ज्या (क + ख) ज्या (क - ख)

$$\begin{aligned}
 &= (\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}) \times \\
 &\quad (\text{ज्या क कोज्या ख} - \text{कोज्या क ज्या ख}) \\
 &= \text{ज्या}^2 \text{ क कोज्या}^2 \text{ ख} - \text{कोज्या}^2 \text{ क ज्या}^2 \text{ ख} \\
 &= (1 - \text{कोज्या}^2 \text{ क}) \text{ कोज्या}^2 \text{ ख} \\
 &\quad - \text{कोज्या}^2 \text{ क} (1 - \text{कोज्या}^2 \text{ ख}) \\
 &= \text{कोज्या}^2 \text{ ख} - \text{कोज्या}^2 \text{ क}
 \end{aligned}$$

उदाहरण ५. सिद्ध करा:—

$$\frac{\text{कोज्या } 9^\circ + \text{ज्या } 9^\circ}{\text{कोज्या } 9^\circ - \text{ज्या } 9^\circ} = \text{रूप } ५४^\circ$$

$$\text{रूप } ५४^\circ = \text{रूप } (४५^\circ + ९^\circ)$$

$$= \frac{\text{रूप } ४५^\circ + \text{रूप } ९^\circ}{1 - \text{रूप } ४५^\circ \text{ रूप } ९^\circ} \quad (\text{७.३ अनुच्छेदाने})$$

$$= \frac{1 + \text{रूप } ९^\circ}{1 - \text{रूप } ९^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{\text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ}}{1 - \frac{\text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } ९^\circ + \text{ज्या } ९^\circ}{\text{कोज्या } ९^\circ - \text{ज्या } ९^\circ}$$

उदाहरणसंग्रह ९

(१) जर ज्या $इ = \frac{५}{१३}$ व कोज्या $ई = \frac{४}{५}$ असतील
तर ज्या $(इ + ई)$, कोज्या $(इ - ई)$ व स्प $(इ - ई)$ यांची
माने काढा.

(२) जर स्प $उ = \frac{६}{७}$ व स्प $ऊ = -\frac{१}{१३}$ असतील

तर $उ + ऊ = \frac{५५}{४}$ हे सिद्ध करा

(३) जर स्प $क = \frac{१}{४}$ आणि स्प $ख = \frac{३}{५}$ असतील तर

$(क + ख)$ काढा.

सिद्ध करा :—

(४) [ज्या $(६०^\circ - अ)$ कोज्या $(३०^\circ - आ)$
+ कोज्या $(६०^\circ - अ)$ ज्या $(३०^\circ - आ)$]
= कोज्या $(अ + आ)$

(५) [कोज्या $(८०^\circ + अ)$ कोज्या $(८०^\circ - अ)$
+ ज्या $(८०^\circ + अ)$ ज्या $(८०^\circ - अ)$] = कोज्या $२ अ$

(६) कोज्या $७५^\circ + ज्या १०५^\circ = ज्या ७५^\circ - कोज्या १०५^\circ$

(७) $\frac{ज्या (क - ख)}{ज्या क ज्या ख} + \frac{ज्या (ख - ग)}{ज्या ख ज्या ग}$
+ $\frac{ज्या (ग - क)}{ज्या ग ज्या क} = ०$

$$(८) \left\{ ज्या(अ + भा)कोज्या इ - कोज्या(भा + इ)ज्या अ \right\} \\ = ज्या भा कोज्या (इ - अ)$$

$$(९) कोस्प क - कोस्प २ क = व्युज्या २ क \\ [कलकत्ता १८७०]$$

$$(१०) १ + स्प अ स्प २ अ - व्युत्कोज्या २ अ = ० \\ [कलकत्ता १८७७]$$

$$(११) \frac{१ + स्प क कोस्प ख}{कोस्प ख - स्प क} = स्प (क + ख)$$

$$(१२) स्प \frac{व्या}{४} + स्प \frac{व्या}{६} स्प \frac{व्या}{१२} = \sqrt{१ + स्प^२ \frac{व्या}{६}}$$

$$(१३) स्प \left(\frac{व्या}{४} + अ \right) स्प \left(\frac{व्या}{४} - अ \right) \\ + कोस्प \left(\frac{व्या}{४} + अ \right) कोस्प \left(\frac{८व्या}{४} + अ \right)$$

$$(१४) स्प ५०^{\circ} + स्प १०^{\circ} + \sqrt{३} स्प ५०^{\circ} स्प १०^{\circ} = \sqrt{३} \\ = ०$$

$$(१५) स्प (४५^{\circ} + क) स्प (४५^{\circ} - क) = १$$

$$(१६) जर स्प स = \frac{स ज्या क कोज्या क}{१ - स ज्या^२ क} अतः तब \\ स्प (क - स) = (१ - स) स्प क हें दाखवा.$$

[पाटना १९४१]

(१७) क ज्या सर्व मानांकरिता,
 $\frac{\text{कोस्प क}}{१ + \text{कोस्प क}} \cdot \frac{\text{कोस्प } (४५^{\circ} - \text{क})}{१ + \text{कोस्प } (४५^{\circ} - \text{क})}$ चें मान एकच
 राहते हें दाखवा. [पाटणा १९४२]

(१८) क कोणाचे असे दोन भाग केले की त्या भागांच्या
 स्पर्शज्यांची निष्पत्ति न, आणि त्या भागांमधील
 फरक य आहे. तर

$\text{ज्या य} = \frac{n-१}{n+१} \text{ ज्या क}$
 हें दाखवा. [अलाहाबाद १९४५]

७.२ गुणनफलांचें (products) योग किंवा वियोग
 फलांत रूपांतर.

७.१ व ७.२ या अनुच्छेदांवरून,

ज्या (क + ख) = ज्या क कोज्या ख
 + कोज्या क ज्या ख ... (अ)

ज्या (क - ख) = ज्या क कोज्या ख
 - कोज्या क ज्या ख ... (आ)

कोज्या (क + ख) = कोज्या क कोज्या ख
 - ज्या क ज्या ख ... (इ)

कोज्या (क - ख) = कोज्या क कोज्या ख
 + ज्या क ज्या ख ... (ई)

(अ) आणि (आ) यांचा योग करून,

$$\text{ज्या (क + ख) + ज्या (क - ख)} \\ = २ज्या क कोज्या ख ... (१)$$

(प्र) तून (धा) चा वियोग करून,

$$\text{ज्या (क + ख) - ज्या (क - ख)} \\ = २कोज्या क ज्या ख ... (२)$$

(इ) य (ई) चा योग करून,

$$\text{कोज्या (क + ख) + कोज्या (क - ख)} \\ = २कोज्या क कोज्या ख ... (३)$$

(ई) तून (इ) चा वियोग करून,

$$\text{कोज्या (क - ख) - कोज्या (क + ख)} \\ = २ज्या क ज्या ख ... (४)$$

थरील चार सूत्रे वापण पुन्हा खालीलप्रमाणे लिहूं.

$$२ज्या क कोज्या ख = ज्या (क + ख) \\ + ज्या (क - ख) ... (५)$$

$$२कोज्या क ज्या ख = ज्या (क + ख) \\ - ज्या (क - ख) ... (६)$$

$$२कोज्या क कोज्या ख = कोज्या (क + ख) \\ + कोज्या (क - ख) ... (७)$$

$$२ज्या क ज्या ख = कोज्या (क - ख) \\ - कोज्या (क + ख) ... (८)$$

(५) ते (८) हीं चार सूत्रे दोन कोणांच्या ज्या आणि कोटिज्या यांच्या गुणनफलांचे, त्या कोणांच्या दोन ज्यांच्या किंवा दोन कोटिज्यांच्या योगांत वा विशेषांत रूपांतर करतात.

७.७ योग अथवा वियोग फलांचे गुणनफलांत रूपांतर.

$$\text{समजा } क + ख = ग \text{ व } क - ख = घ$$

$$\text{तर } क = \frac{ग + घ}{२} \text{ त्याचि ख } = \frac{ग - घ}{२}$$

मागील अनुच्छेदाचें (२) रें सूत्र

$$\begin{aligned} \text{काज्या}(क + ख) - काज्या(क - ख) &= -२ ज्या कज्या ख \\ &= २ ज्या कज्या(-ख) \end{aligned}$$

अर्नेहि लिहिनां येने हें ध्यानांत ठेवून ७.६ अनुच्छेदाच्या (१), (२), (३), (४) या फलांत क व ख करिता अनुक्रमें $\frac{ग + घ}{२}$ व $\frac{ग - घ}{२}$ हे आदेश (substitutions) करा.

त्यामुळे पेंघळ दोन ज्या किंवा केवळ दोन कोटिज्या यांच्या योगांचें अथवा वियोगांचें, ज्या व कोटिज्या यांच्या गुणाकागांन रूपांतर करणारी खालील चार सूत्रें आपणांस मिळतात.

$$\text{ज्या ग} + \text{ज्या घ} = २ज्या \frac{ग + घ}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग - घ}{२} \quad \dots (१)$$

$$\text{ज्या ग} - \text{ज्या घ} = २कोज्या \frac{ग + घ}{२} \text{ ज्या } \frac{ग - घ}{२} \quad \dots (२)$$

$$\text{कोज्या ग} + \text{कोज्या घ} = २कोज्या \frac{ग + घ}{२} \text{ कोज्या } \frac{ग - घ}{२} \quad \dots (३)$$

$$\text{कोज्या ग} - \text{कोज्या घ} = २ज्या \frac{ग + घ}{२} \text{ ज्या } \frac{घ - ग}{२} \quad \dots (४)$$

या सूत्रांना गुणनसूत्रें म्हणतात.

७.८ दिलेली ज्या असणाऱ्या सर्व कोणांची सामान्य पदसंहति काढा.

समजा दिलेली ज्या असणाऱ्या इ हा आविष्ट कोण आहे, व तितकीच ज्या असणाऱ्या अ हा दुसरा एक कोण आहे.

आता आपणांस ज्या अ = ज्या इ या समीकराचे समाधान करणारी अ ची सामान्यतम अर्हा काढावयाची आहे.

$$\text{ज्या अ} = \text{ज्या इ}$$

$$\text{किंवा ज्या अ} - \text{ज्या इ} = ०$$

म्हणून ७.७ अनुच्छेदांतील (२) वरून,

$$२\text{ज्या } \frac{\text{अ} - \text{इ}}{२} \text{ को ज्या } \frac{\text{अ} + \text{इ}}{२} = ०$$

$$\text{म्हणून, एकतर ज्या } \frac{\text{अ} - \text{इ}}{२} = ०$$

$$\begin{aligned} \text{अर्थात् } \frac{१}{२} (\text{अ} - \text{इ}) &= \text{ज्या चा कोणताहि अपघट्य} \\ &= \text{घ ज्या} \end{aligned}$$

$$\text{अर्थात् अ} = २ \text{ घ ज्या} + \text{इ} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{किंवा को ज्या } \frac{\text{अ} + \text{इ}}{२} = ०$$

$$\text{म्हणजे } \frac{म+१}{२} = \frac{प्या}{२} \text{ चा कोणताहि विषय अवश्यतः}$$

$$= (२घ+१) \frac{प्या}{२}$$

$$\text{अर्थात् } म = -१ + (२घ+१) प्या \dots\dots\dots (२)$$

म शून्य क्रिया कोणताहि घन या क्रुण पूर्णांक असेल तर थरील दोन्ही अर्दा $अ = मप्या + (-१)^न$ इ या पदसंहतीत समाविष्ट होतात.

अशाच रीतीने दिलेली कोटिज्या क्रिया दिलेली स्पर्शज्या असणाऱ्या सर्व कोणांच्या सामान्य पदसंहती वाढता येतात.

७.२. उदाहरण १. सिद्ध करा :-

$$२ज्या \frac{प्या}{११} ज्या \frac{७ प्या}{११} + ज्या \frac{प्या}{२२} - ज्या \frac{१ प्या}{२२} = ०$$

(७.६) अनुच्छेदांतील (८) घरून,

$$२ज्या \frac{प्या}{११} ज्या \frac{७ प्या}{११} = कोज्या \frac{६ प्या}{११} - कोज्या \frac{८ प्या}{११}$$

$$\text{परंतु कोज्या } \frac{६ प्या}{११} = कोज्या \left(\frac{प्या}{२} + \frac{प्या}{२२} \right)$$

$$= -ज्या \frac{प्या}{२२}$$

$$\text{आणि कोज्या } \frac{८८प्या}{११} = ज्या \left(\frac{प्या}{२} - \frac{८८प्या}{११} \right)$$

$$= ज्या \left(- \frac{५प्या}{२२} \right)$$

$$= -ज्या \frac{५प्या}{२२}$$

$$\text{म्हणून } २ज्या \frac{प्या}{११} ज्या \frac{७प्या}{११} = -ज्या \frac{प्या}{२२} + ज्या \frac{५प्या}{२२}$$

$$\text{किंवा } २ज्या \frac{प्या}{११} ज्या \frac{७प्या}{११} + ज्या \frac{प्या}{२२} - ज्या \frac{५प्या}{२२} = ०$$

उदाहरण २. सरळ रूपाने :—

$$\frac{ज्या अ + ज्या २ अ + ज्या ३ अ + ज्या ४ अ}{कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ + कोज्या ४ अ}$$

$$\begin{aligned} &\text{आता, } ज्या अ + ज्या २ अ + ज्या ३ अ + ज्या ४ अ \\ &= (ज्या अ + ज्या ४ अ) + (ज्या २ अ + ज्या ३ अ) \\ &= २ज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{३अ}{२} + २ज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२} \end{aligned}$$

(७-७ अनुच्छेदाने)

$$= २ज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$$

शियाय, कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ + काज्या ४ अ
 $= (कोज्या अ + कोज्या ४अ) + (कोज्या २अ + कोज्या ३अ)$

$$= २कोज्या \frac{५अ}{२} काज्या \frac{३अ}{२} + २कोज्या \frac{५अ}{२} कोज्या \frac{अ}{२}$$

(७७ अनुच्छेदाने)

$$= २कोज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)$$

म्हणून, दिलेली पदसंहति

$$= \frac{२ज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)}{२कोज्या \frac{५अ}{२} \left(कोज्या \frac{३अ}{२} + कोज्या \frac{अ}{२} \right)}$$

$$= २२ \frac{५अ}{२}$$

उदाहरणसंग्रह १०

$$(१) \text{ ज्या क} = \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ व ज्या ख} = \frac{१}{\sqrt{३}} \text{ असल्यास}$$

$$\text{स्प}\left(\frac{\text{क} + \text{ख}}{२}\right) \text{ को स्प}\left(\frac{\text{क} - \text{ख}}{२}\right) \text{ चें मान काढा.}$$

[कलकत्ता १८७५]

सिद्ध करा:—

$$(२) \frac{\text{कोज्या } २क - \text{कोज्या } ४क}{\text{ज्या } ४क - \text{ज्या } २क} = \text{स्प } ३क$$

[कलकत्ता १८९३]

$$(३) \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}} = \text{स्प } \frac{\text{क} + \text{ख}}{२}$$

[कलकत्ता १८७३]

$$(४) \text{ कोज्या क} + \text{कोज्या } (१२०^\circ + \text{क}) \\ + \text{कोज्या } (१२०^\circ - \text{क}) = ०$$

[कलकत्ता १९१७]

$$(५) \frac{\text{ज्या } ३अ - २\text{ज्या } ७अ + \text{ज्या } ११अ}{\text{कोज्या } ३अ - २\text{कोज्या } ७अ + \text{कोज्या } ११अ} = \text{स्प } ७अ$$

$$(६) \quad \text{कोज्या २क} + \text{कोज्या ४क} + \text{कोज्या ६क} + \text{कोज्या ८क} \\ = \text{४कोज्या क कोज्या २क कोज्या ५क} \\ \text{[कलकत्ता १८८७]}$$

$$(७) \quad \text{ज्या } १०^\circ + \text{ज्या } २०^\circ + \text{ज्या } ४०^\circ + \text{ज्या } ५०^\circ \\ = \text{ज्या } ७०^\circ + \text{ज्या } ८०^\circ$$

$$(८) \quad \text{कोज्या } ५५^\circ + \text{कोज्या } ६५^\circ + \text{कोज्या } १७५^\circ = ० \\ \text{[कलकत्ता १८७६]}$$

$$(९) \quad \text{ह्रस्व } ७०^\circ = २ \text{ ह्रस्व } ५०^\circ + \text{ह्रस्व } २०^\circ \\ \text{[घनारस १९४४]}$$

$$(१०) \quad \text{ज्या } २०^\circ \text{ ज्या } ४०^\circ \text{ ज्या } ६०^\circ \text{ ज्या } ८०^\circ = \frac{३}{१६} \\ \text{[नागपुर १९३६]}$$

$$(११) \quad \text{कोज्या } १५^\circ - \text{ज्या } १५^\circ = \frac{१}{\sqrt{२}} \\ \text{[घनारस १९३८]}$$

$$(१२) \quad \text{ह्रस्व } \frac{\text{क} + \text{ख}}{२} + \text{ह्रस्व } \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{२ \text{ ज्या क}}{\text{कोज्या क} + \text{कोज्या ख}} \\ \text{[घनारस १९३९]}$$

- (१३) जर (व्युज्ज्या क + व्युत्कोज्या क)
 $= (\text{व्युज्ज्या ख} + \text{व्युत्कोज्या ख})$ असेल तर
 $\text{स्पक स्पख} = \text{कोस्प} \left(\frac{\text{क} + \text{ख}}{२} \right)$ हें दाखवा.

[पाटणा १९३६]

- (१४) जर $\frac{\text{स्प अ}}{\text{य}} = \frac{\text{स्प आ}}{\text{र}} = \frac{\text{स्प इ}}{\text{ल}}$ असेल तर
 $\left(\frac{\text{र} + \text{ल}}{\text{र} - \text{ल}} \right) \text{ज्या}^२ (\text{आ} - \text{इ}) + \left(\frac{\text{ल} + \text{य}}{\text{ल} - \text{य}} \right) \text{ज्या}^२ (\text{इ} - \text{अ})$
 $+ \left(\frac{\text{य} + \text{र}}{\text{य} - \text{र}} \right) \text{ज्या}^२ (\text{अ} - \text{आ}) = ०$ हें सिद्ध करा.

[यनारस १९२७]

सिद्ध करा:—

- (१५) $\frac{\text{ज्या११क ज्याक} + \text{ज्या७क ज्या३क}}{\text{काज्या ११ क ज्या क} + \text{काज्या७क ज्या३क}}$
 $= \text{स्प} < \text{क}$ [पंजाब १९१२]

- (१६) कोज्या २ अ कोज्या $\frac{\text{अ}}{२} - \text{कोज्या अ कोज्या } \frac{७\text{अ}}{२}$
 $= \text{ज्या } \frac{३\text{अ}}{२} \text{ ज्या } \frac{३\text{अ}}{२}$

- (१७) ज्या $\frac{११\text{अ}}{४}$ ज्या $\frac{\text{अ}}{४} + \text{ज्या } \frac{७\text{अ}}{४}$ ज्या $\frac{३\text{अ}}{४}$
 $= \text{ज्या } २ \text{ अ ज्या अ}$
 [कलकत्ता १९०४]

$$\begin{aligned}
 (१८) \quad & \text{ज्या} \frac{\text{क}-\text{ख}-\text{ग}}{२} \text{ज्या} \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} \\
 & + \text{ज्या} \frac{\text{ख}+\text{क}-\text{ग}}{२} \text{ज्या} \frac{\text{ख}+\text{ग}}{२} \\
 & = \text{ज्या ख ज्या} \frac{\text{क}}{२} \\
 & \text{[फलकता १८८५]}
 \end{aligned}$$

प्रकरण आठवें

अपवर्त्य आणि अपवर्तक कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती

अपवर्त्य कोण

८.१ २ व ३ कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती क कोणाच्या निष्पत्तीच्या रूपांत काढणें.

७.१ या अनुच्छेदाच्या सूत्रांमध्ये ख = क ठेवल्यास
ज्या १ क = ज्या क कोज्या क + कोज्या क ज्याक
= २ ज्या क कोज्या क (१)

कोज्या २क = कोज्या क कोज्या क - ज्याक ज्याक
= कोज्या^२ क - ज्या^२ क

आता, कोज्या^२ क - ज्या^२ क = कोज्या^२ क - (१ - कोज्या^२ क)
= २कोज्या^२ क - १
= २ (१ - ज्या^२ क) - १
= १ - २ ज्या^२ क

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{कोज्या } 2 \text{ क} &= \text{कोज्या}^2 \text{ क} - \text{ज्या}^2 \text{ क} \\
 &= 2 \text{ कोज्या}^2 \text{ क} - 1 \\
 &= 1 - 2 \text{ ज्या}^2 \text{ क} \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

$$\text{पुन्हा स्प } 2 \text{ क} = \frac{\text{ज्या } 2 \text{ क}}{\text{कोज्या } 2 \text{ क}}$$

$$= \frac{2 \text{ ज्या क कोज्या क}}{\text{कोज्या}^2 \text{ क} - \text{ज्या}^2 \text{ क}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अंश घ हर या दोहोंस कोज्या}^2 \text{ क ने भागून} \\
 \text{स्प } 2 \text{ क} = \frac{2 \text{ स्प क}}{1 - \text{स्प}^2 \text{ क}} \dots\dots \dots(3)
 \end{aligned}$$

७.३ या अनुच्छेदातीत सूत्र (१) मध्ये ए = क ठेवून हि सूत्र (३) मिळविता येते

$$\begin{aligned}
 \text{जसे, स्प } 2 \text{ क} &= \frac{\text{स्प क} + \text{स्प क}}{1 - \text{स्प क} \cdot \text{स्प क}} \\
 &= \frac{2 \text{ स्प क}}{1 - \text{स्प}^2 \text{ क}}
 \end{aligned}$$

उपसाध्य :- सूत्र (२) प्रकृत

$$१ + कोज्या २ क = २ कोज्या^२ क$$

$$\text{आणि } १ - कोज्या २ क = २ ज्या^२ क$$

८.२ ३क कोणाच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती क च्या निष्पत्तीच्या रूपात काढणे

$$ज्या ३क = ज्या (२क + क)$$

$$= ज्या २क कोज्या क + कोज्या २क ज्या क$$

$$= २ज्या क कोज्या क कोज्या क$$

$$+ (कोज्या^२ क - ज्या^२ क) ज्या क$$

$$= ३ज्या क कोज्या^२ क - ज्या^२ क$$

$$= ३ज्या क (१ - ज्या^२ क) - ज्या^२ क$$

$$ज्या ३क = ३ज्या क - ४ज्या^३ क$$

(४)

$$कोज्या ३क = कोज्या (२क + क)$$

$$= कोज्या २क कोज्या क - ज्या २क ज्या क$$

$$- (२कोज्या^२ क - १) कोज्या क$$

$$- २ज्या क कोज्या क ज्या क$$

$$= २कोज्या^३ क - कोज्या क - २कोज्या क \times$$

$$(१ - कोज्या^२ क)$$

$$कोज्या ३ क = ४ कोज्या^३ क - ३ कोज्या क \quad (५)$$

$$स्प ३ क = स्प (२ क + क)$$

$$= \frac{स्प २ क + स्प क}{१ - स्प २क स्प क}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} + \sin \theta \cos \theta}{1 - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} \times \sin \theta \cos \theta} \\
 &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta + (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta \cos \theta} \\
 \therefore \sin 2\theta &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}{1 - 2 \sin^2 \theta \cos \theta} \dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

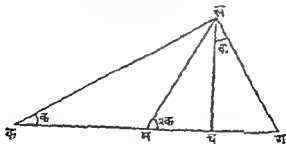
(४) व (५) या सूत्रों का

उदा $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ ($\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$)

$\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$ ($\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$)

हो कर देता है यथातथे सहज दिखन देईल.

८.३ २ क ज्या निष्पत्ति रैखिकीने काढे.



आ. ८.१

समजा कला रेखा कम रेपेक्षी क हा कोण करते. काग रेपेक्ष म हा कोणतादि बिन्दु केन्द्र धेऊन मक विज्या अतलेले एक वृत्त काढा.

$$= \frac{\frac{\text{रखच}}{\text{कच}}}{1 - \left(\frac{\text{चग}}{\text{चख}}\right) \left(\frac{\text{चख}}{\text{कच}}\right)}$$

$$= \frac{२ \text{ स्प क}}{१ - \text{स्प}^२ \text{ क}}$$

८.३१ उदाहरण १. ज्या ५अ ज्या अ च्या रूपांत व्यक्त करा.

ज्या ५अ

$$\begin{aligned}
 &= \text{ज्या } (३ \text{ अ} + २ \text{ अ}) \\
 &= \text{ज्या } ३ \text{ अ कोज्या } २ \text{ अ} + \text{कोज्या } ३ \text{ अ ज्या } २ \text{ अ} \\
 &= (३ \text{ ज्या अ} - ४ \text{ ज्या}^३ \text{ अ}) (१ - २ \text{ ज्या}^२ \text{ अ}) \\
 &\quad + (४ \text{ कोज्या}^३ \text{ अ} - ३ \text{ कोज्या अ}) \cdot २ \text{ ज्या अ कोज्या अ} \\
 &= (३ \text{ ज्या अ} - १० \text{ ज्या}^३ \text{ अ} + ८ \text{ ज्या}^५ \text{ अ}) \\
 &\quad + २ \text{ ज्या अ कोज्या}^२ \text{ अ} (४ \text{ कोज्या}^२ \text{ अ} - ३) \\
 &= (३ \text{ ज्या अ} - १० \text{ ज्या}^३ \text{ अ} + ८ \text{ ज्या}^५ \text{ अ}) \\
 &\quad + २ \text{ ज्या अ } (१ - \text{ज्या}^२ \text{ अ}) (१ - ४ \text{ ज्या}^२ \text{ अ}) \\
 &= (३ \text{ ज्या अ} - १० \text{ ज्या}^३ \text{ अ} + ८ \text{ ज्या}^५ \text{ अ}) \\
 &\quad + २ \text{ ज्या अ } (१ - ५ \text{ ज्या}^२ \text{ अ} + ४ \text{ ज्या}^४ \text{ अ}) \\
 &= ५ \text{ ज्या अ} - २० \text{ ज्या}^३ \text{ अ} + १६ \text{ ज्या}^५ \text{ अ}
 \end{aligned}$$

उदाहरण २. $\frac{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ} - \text{कोज्या } २ \text{ अ}}{१ + \text{ज्या } २ \text{ अ} + \text{कोज्या } २ \text{ अ}} = \text{स्प अ}$

हैं सिद्ध करा.

[कलकत्ता १९३८]

वामपक्ष = $\frac{(१ - \text{कोज्या } २ \text{ अ}) + \text{ज्या } २ \text{ अ}}{(१ + \text{कोज्या } २ \text{ अ}) + \text{ज्या } २ \text{ अ}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \text{ ज्या }^1 \text{ अ} + 2 \text{ ज्या अ को ज्या अ}}{2 \text{ को ज्या }^1 \text{ अ} + 2 \text{ ज्या अ को ज्या अ}} \\
&= \frac{2 \text{ ज्या अ (ज्या अ + को ज्या अ)}}{2 \text{ को ज्या अ (को ज्या अ + ज्या अ)}} \\
&= \frac{\text{ज्या अ}}{\text{को ज्या अ}} = \text{स्प अ} = \text{दक्षिणपक्ष}
\end{aligned}$$

उदाहरण ३. $\frac{\text{व्युत्को ज्या ८क} - १}{\text{व्युत्को ज्या ४क} - १} = \frac{\text{स्प ८क}}{\text{स्प २क}}$
हैं सिद्ध करा.

$$\begin{aligned}
\text{धामपक्ष} &= \frac{\frac{1}{\text{को ज्या ८क}} - 1}{\frac{1}{\text{को ज्या ४क}} - 1} \\
&= \frac{\frac{\text{को ज्या ४क}}{\text{को ज्या ८क}} \times \frac{1 - \text{को ज्या ८क}}{1 - \text{को ज्या ४क}}}{\frac{\text{को ज्या ४क}}{\text{को ज्या ८क}} \times \frac{2 \text{ ज्या }^1 \text{ अक}}{2 \text{ ज्या }^1 \text{ अक}}} \\
&= \frac{2 \text{ ज्या अक को ज्या अक}}{\text{को ज्या ८क}} \times \frac{\text{ज्या अक}}{2 \text{ ज्या }^1 \text{ अक}} \\
&= \frac{\text{ज्या ८क}}{\text{को ज्या ८क}} \times \frac{2 \text{ ज्या २क को ज्या २क}}{2 \text{ ज्या }^1 \text{ अक}} \\
&= \text{स्प ८ क} \times \frac{\text{को ज्या २ क}}{\text{ज्या २ क}} \\
&= \frac{\text{स्प ८ क}}{\text{स्प २ क}} = \text{दक्षिणपक्ष}
\end{aligned}$$

उदाहरणसंग्रह ११

(१) स्प ४क, स्प क च्या रूपांत व्यक्त करा.

[कलकत्ता १९१८]

सिद्धे फलः—

$$(२) \frac{\text{ज्या } २ क}{१ - \text{कोज्या } २ क} = \text{कोस्प क}$$

$$(३) \text{स्प क} + \text{कोस्प क} = २ \text{ द्युज्या } २ क$$

[कलकत्ता १९१८]

$$(४) \frac{\text{कोज्या } २ अ}{१ + \text{ज्या } २ अ} = \text{स्प } (४५^{\circ} - अ) = \frac{१ - \text{ज्या } २ अ}{\text{कोज्या } २ अ}$$

$$(५) \text{कोज्या}^२ क + \text{कोज्या}^२ (६०^{\circ} + क)$$

$$+ \text{कोज्या}^२ (६०^{\circ} - क) = \frac{३}{२} \quad [\text{पाटणा १९३७}]$$

$$(६) \text{कोस्प क} + \text{कोस्प } (६०^{\circ} + क) + \text{कोस्प } (१२०^{\circ} + क) = ३ \text{ कोस्प } ३ क$$

[पाटणा १९४५]

$$(७) \frac{१ - \text{स्प}^२ (४५^{\circ} - अ)}{१ + \text{स्प}^२ (४५^{\circ} - अ)} = \text{ज्या } २ अ$$

$$(८) \frac{२ \text{ ज्या } अ}{\text{ज्या } ३ अ} + \frac{\text{स्प अ}}{\text{स्प } ३ अ} = १$$

[मुंबई १८९६]

$$(९) \text{ ज्या } ६क = ४ \text{ ज्या } २क \text{ ज्या } (६०^{\circ} + २क) \times$$

$$\text{ज्या } (६०^{\circ} - २क) \quad [\text{कलकत्ता } १८७३]$$

$$(१०) \text{ ज्या } (२स + १)य \text{ ज्या } य = ज्या^२ (स + १)य - ज्या^२ सय$$

$$(११) \text{ जर } २स्पअ = ३ \text{ स्पआ असेल तर}$$

$$\text{स्प } (अ - आ) = \frac{\text{ज्या } २ आ}{५ - \text{कोज्या } २आ} \text{ हें दाखवा.}$$

$$[\text{कलकत्ता } १९४६]$$

सिद्ध करा. :-

$$(१२) ४ (\text{कोज्या}^३क \text{ ज्या } ३क + ज्या^३क \text{ कोज्या } ३क) = ३ \text{ ज्या } ४क$$

$$[\text{चनारस } १९३५]$$

$$(१३) \text{ कोज्या}^३क \text{ कोज्या } ३क + ज्या^३क \text{ ज्या } ३क = \text{कोज्या}^३२क$$

$$[\text{पाटणा } १९४३]$$

$$(१४) \text{ ज्या}^३क + ज्या^३ (१२०^{\circ} + क) + ज्या^३ (२४०^{\circ} + क)$$

$$= -\frac{३}{४} \text{ ज्या } ३क \quad [\text{पाटणा } १९३९]$$

$$(१५) \text{ स्प } ३क \text{ स्प } २क \text{ स्प } क = \text{स्प } ३क - \text{स्प } २क - \text{स्प } क$$

$$[\text{पाटणा } १९३७]$$

अपवर्तक (submultiple) कोण

$$८.४ \text{ ज्या } २क = २ \text{ ज्या } क \text{ कोज्या } क$$

$$\text{कोज्या } २क = \text{कोज्या}^२क - ज्या^२क = २ \text{ कोज्या}^२क - १$$

$$= १ - २ \text{ ज्या}^२क$$

$$\text{आणि } \text{स्प } २क = \frac{२ \text{ स्प } क}{१ - \text{स्प}^२क}$$

हीं अपवर्त्य कोणांची सूत्रे क चे मान कांहीहि असंल तरी सत्य आहेत. म्हणून २क च्या जागी क आणि क च्या जागी $\frac{क}{२}$ ठेवले तरी ती सत्यच राहतील.

म्हणून हे आदेश करून आपणांस अपवर्तक कोणांची पुढील सूत्रे मिळतात.

$$\text{ज्याक} = २ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

$$\begin{aligned} \text{कोज्या क} &= \text{कोज्या}^२ \frac{क}{२} - \text{ज्या}^२ \frac{क}{२} = २ \text{ कोज्या}^२ \frac{क}{२} - १ \\ &= १ - २ \text{ ज्या}^२ \frac{क}{२} \end{aligned}$$

$$\text{आणि स्प क} = \frac{२ \text{ स्प } \frac{क}{२}}{१ - \text{स्प}^२ \frac{क}{२}}$$

८.५ आता आपण ज्याक आणि कोज्याक, $\text{स्प } \frac{क}{२}$ च्या रूपांत व्यक्त करूं.

$$\text{ज्या क} = २ \text{ ज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क}{२}$$

$$= \frac{2 \text{ ज्या } \frac{क}{2}}{\text{कोज्या } \frac{क}{2}} \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{क}{2}$$

$$= 2 \text{ स्प } \frac{क}{2} \cdot \frac{1}{\text{व्युत्कोज्या}^2 \frac{क}{2}}$$

$$= \frac{2 \text{ स्प } \frac{क}{2}}{1 + \text{स्प}^2 \frac{क}{2}}$$

$$\text{कोज्या क} = \text{कोज्या}^2 \frac{क}{2} - \text{ज्या}^2 \frac{क}{2}$$

$$= \text{कोज्या}^2 \frac{क}{2} - \frac{\text{ज्या}^2 \frac{क}{2}}{\text{कोज्या}^2 \frac{क}{2}} \cdot \text{कोज्या}^2 \frac{क}{2}$$

$$= \text{कोज्या}^2 \frac{क}{2} \left(1 - \frac{\text{ज्या}^2 \frac{क}{2}}{\text{कोज्या}^2 \frac{क}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\text{व्युत्कोज्या}^2 \frac{क}{2}} \left(1 - \text{स्प}^2 \frac{क}{2} \right)$$

$$= \frac{1 - \text{स्प}^2 \frac{क}{2}}{1 + \text{स्प}^2 \frac{क}{2}}$$

८.७ ज्या $\frac{\phi}{2}$, कोज्या $\frac{\phi}{2}$ व $\sec \frac{\phi}{2}$ च्या अर्ही ज्या ϕ च्या रूपांत काढणें.

$$\text{आता ज्या } \phi = 2 \text{ ज्या } \frac{\phi}{2} \text{ कोज्या } \frac{\phi}{2}$$

$$\text{आणि } 1 = \text{ज्या}^2 \frac{\phi}{2} + \text{कोज्या}^2 \frac{\phi}{2}$$

घरील दोन समीकरांचा योग आणि वियोग करून,

$$1 + \text{ज्या } \phi = \left(\text{कोज्या } \frac{\phi}{2} + \text{ज्या } \frac{\phi}{2} \right)^2 \quad \dots (1)$$

$$1 - \text{ज्या } \phi = \left(\text{कोज्या } \frac{\phi}{2} - \text{ज्या } \frac{\phi}{2} \right)^2 \quad \dots (2)$$

(1) व (2) चे वर्गमूल (square root) काढून,

$$\text{कोज्या } \frac{\phi}{2} + \text{ज्या } \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{ज्या } \phi} \quad \dots (3)$$

$$\text{कोज्या } \frac{\phi}{2} - \text{ज्या } \frac{\phi}{2} = \pm \sqrt{1 - \text{ज्या } \phi} \quad \dots (4)$$

(3) व (4) यांचा योग आणि वियोग करून,

$$\text{कोज्या } \frac{\phi}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{ज्या } \phi}$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \text{ज्या } \phi} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ज्या } \frac{क}{२} &= \pm \frac{१}{२} \sqrt{१ + \text{ज्या } क} \\ &\quad \mp \frac{१}{२} \sqrt{१ - \text{ज्या } क} \quad \dots (६) \end{aligned}$$

(६) ला (५) ने भागून स्पष्ट काढतां येतें.

८७१ चिन्हांच्या संदिग्धतेचें स्पष्टीकरण.

क न देतां ज्या क दिलेली असेल तर ६ व्या प्रकरणांत स्पष्ट केल्याप्रमाणे ज्या क च्या दिलेल्या अर्धेकरितां क च्या अर्धांची एक थोडी बनते. म्हणून दोन संभाव्य चरणांपैकी कोणत्याहि एकांत $\frac{क}{२}$ राहूं शकतो.

$$\begin{aligned} \text{आता, कोज्या } \frac{क}{२} + \text{ज्या } \frac{क}{२} \\ &= \sqrt{२} \left(\frac{१}{\sqrt{२}} \text{ कोज्या } \frac{क}{२} + \frac{१}{\sqrt{२}} \text{ ज्या } \frac{क}{२} \right) \\ &= \sqrt{२} \left(\text{ज्या } \frac{क}{४} \text{ कोज्या } \frac{क}{२} + \text{कोज्या } \frac{क}{४} \text{ ज्या } \frac{क}{२} \right) \\ &= \sqrt{२} \text{ ज्या } \left(\frac{क}{४} + \frac{क}{२} \right). \end{aligned}$$

$$\text{तसेंच, कोज्या } \frac{क}{२} - \text{ज्या } \frac{क}{२} = \sqrt{२} \text{ ज्या } \left(\frac{क}{४} - \frac{क}{२} \right)$$

क दिलेला असेल तेव्हा $\frac{\cos A}{2} + \frac{\cos B}{2}$ आणि $\frac{\cos A}{2} - \frac{\cos B}{2}$

कोणत्या चरणांत आहेत हे निश्चितपणे माहीत होतं. म्हणून

, कोज्या $\frac{\cos A}{2} + \cos \frac{B}{2}$ आणि कोज्या $\frac{\cos A}{2} - \cos \frac{B}{2}$ यांची चिन्हे

ठरविता येतात. अशा रीतीने, ज्या $\frac{\cos A}{2}$ व कोज्या $\frac{\cos B}{2}$ यांची

चिन्हे निश्चितपणे माहीत होतील.

उदाहरण. ज्या $18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ घेऊन ज्या 9° व कोज्या 9° काढा.

येथे $\cos A = 18^\circ$, म्हणून $\frac{\cos A}{2} = 9^\circ$

अनुच्छेद ८.७ ज्या (३) व (४) या सूत्रांवरून,
कोज्या $9^\circ + \cos 9^\circ$

$$= + \sqrt{1 + \cos 18^\circ} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \quad -(1)$$

कोज्या $9^\circ - \cos 9^\circ$

$$= + \sqrt{1 - \cos 18^\circ} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{5}}{2}} \quad -(2)$$

[$\angle 9^\circ$ पहिल्या चरणांत असल्यामुळे ज्या 9° व कोज्या 9° ही दोन्ही घन आहेत व म्हणून कोज्या $9^\circ + \cos 9^\circ$

घन जाई. तसेच, कोज्या $9^\circ - \cos 9^\circ = \sqrt{2} \cos \left(\frac{18^\circ}{2} - 9^\circ \right)$

ही संदति जुझा धन भादे हें उघड भादे.]

(१) व (२) चा योग व वियोग फलन,

$$\text{कोज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{३ + \sqrt{५}} + \sqrt{५ - \sqrt{५}}}{४}$$

$$\text{व ज्या } ९^{\circ} = \frac{\sqrt{३ + \sqrt{५}} - \sqrt{५ - \sqrt{५}}}{४}$$

८१° कोण ९°चा लंबपरक असल्यामुळे ८१° च्या निष्पत्ती
धाता लिहितां येतील.

८८ $\text{स्प} \frac{\text{क}}{२}$ स्प क च्या रूपांत काढणें.

$$\text{धाता, स्प क} = \frac{२ \text{स्प} \frac{\text{क}}{२}}{१ - \text{स्प}^२ \frac{\text{क}}{२}}$$

$$\text{स्प क स्प}^२ \frac{\text{क}}{२} + २ \text{स्प} \frac{\text{क}}{२} - \text{स्प क} = ०$$

या समीकरावरून सहज अनुमान निघतें की

$$\text{स्प} \frac{\text{क}}{२} = \frac{-१ \pm \sqrt{१ + \text{स्प}^२ \text{क}}}{\text{स्प क}}$$

या संबंधांतील संदिग्धतेचें स्पष्टीकरण मागे दिल्याप्रमाणेच
जेव्हा आहे.

८.९ 12° व 36° ज्या निर्णयती.

समजा क = 12° . मग ५ क = 90°

किंवा २क = $90^\circ - ३क$

म्हणून ज्या २क = कोज्या ३क

किंवा २ज्या क कोज्या क = कोज्या क ($४कोज्या^२क - ३$)

आता, कोज्या क म्हणजे कोज्या 12° असल्याने शून्य
मसुं शकत नाही.

म्हणून २ज्या क = $४कोज्या^२क - ३$

= $१ - ४ज्या^२क$

किंवा $४ज्या^२क + २ज्या क - १ = ०$

$$\therefore ज्या क = \frac{-२ \pm \sqrt{४ + १६}}{८}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{५} - १}{४}$$

आता, येथे क एक धन न्यूनकोण आहे. म्हणून फक्त
अर्धा सोडून,

$$ज्या 12^\circ = \frac{\sqrt{५} - १}{४}$$

$$\therefore कोज्या 12^\circ = + \sqrt{१ - ज्या^२ 12^\circ}$$

$$= \frac{१}{४} \sqrt{१० + २\sqrt{५}}$$

पुन्हा, कोज्या $36^\circ = १ - २ज्या^२ 12^\circ$

$$= \frac{1}{8} (\sqrt{4} + 1)$$

$$\text{ज्या } 36^\circ = \sqrt{1 - \text{कोज्या}^2 36^\circ}$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{10 - 2\sqrt{4}}$$

उदाहरण:— 43° व 92° ज्या निष्पत्ती काढा.

$$८.२१ \text{ उदाहरण १. जर } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \sin \frac{A}{2}$$

असेल तर

$$\text{कोज्या } A = \frac{\text{कोज्या } A - n}{1 - n \text{ कोज्या } A} \text{ हें सिद्ध करा.}$$

$$\text{जाता, } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{किंवा } \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} \sin \frac{A}{2}$$

$$\text{म्हणून कोज्या } A = \frac{1 - \sin^2 \frac{A}{2}}{1 + \sin^2 \frac{A}{2}}$$

(८.५ अनुच्छेदाने)

$$= \frac{1 - \frac{1+n}{1-n} \sin^2 \frac{A}{2}}{1 + \frac{1+n}{1-n} \sin^2 \frac{A}{2}}$$

$$\text{आता, ज्या } \frac{\text{प्या}}{2} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^4} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^4}$$

.....

$$\text{तस्यैव, ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^s} = 2 \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}}$$

चरील सर्व समीकार एकत्र गुणून,

$$\text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{2} = 2^s \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^4}$$

$$\dots \text{को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}} \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}}$$

$$\text{परंतु ज्या } \frac{\text{प्या}}{2} = 1$$

$$\therefore 1 = 2^s \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^2} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^3} \text{ को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^4}$$

$$\dots \text{को ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}} \text{ ज्या } \frac{\text{प्या}}{2^{s+1}}$$

हे दृष्ट फल,

उदाहरणसंग्रह १२

(१) अ, आ धन आणि न्यून असून कोज्या अ = $\frac{३}{५}$

व कोज्या आ = $\frac{१२}{१३}$ आहेत. तर ज्या $\frac{अ + आ}{२}$ काढा.

(२) जर स्प क = $\frac{२ म न}{म^२ - न^२}$ असेल तर स्प $\frac{क}{२}$ काढा.

[कलकत्ता १८८०]

(३) (१) कोस्प $\frac{२५}{८}$ चे मान काढा.

(२) स्प $\left(७\frac{१}{२}\right)^० = (\sqrt{३} - \sqrt{२})(\sqrt{२} - १)$ हे दाखवा.

(४) उ, ऊ धन आणि न्यून असून

कोज्या २ उ = $\frac{३ कोज्या २ ऊ - १}{३ - कोज्या २ ऊ}$ आहे. तर

स्प उ = $\sqrt{२}$ स्प ऊ हे दाखवा.

[कलकत्ता १९४१]

(५) जर स्प अ = कोज्या २ इ असेल तर

ज्या २ अ = $\frac{१ - स्प^२ इ}{१ + स्प^२ इ}$

हे दाखवा.

[कलकत्ता १८७९]

सिद्ध करा—

(६) $(कोज्या इ + कोज्या ई)^२ + (ज्या इ + ज्या ई)^२$
 $= ४ कोज्या^२ \left(\frac{इ - ई}{२}\right)$

$$(७) (\text{कोज्या इ} - \text{कोज्या ई})^2 + (\text{ज्या इ} - \text{ज्या ई})^2 \\ = ४ \text{ ज्या}^2 \left(\frac{\text{इ} - \text{ई}}{२} \right)^2$$

$$(८) \frac{२ \text{ ज्या क} - \text{ज्या २ क}}{२ \text{ ज्या क} + \text{ज्या २ क}} = \text{स्प}^2 \frac{\text{क}}{२} \quad [\text{कलकत्ता १८६२}]$$

$$(९) \frac{\text{कोस्प}^2 \frac{\text{क}}{२} - १}{\text{कोस्प}^2 \frac{\text{क}}{२} + १} = \frac{२ \text{ कोज्या क}}{१ + \text{कोज्या}^2 \text{ क}} \quad [\text{कलकत्ता १८६९}]$$

$$(१०) (१) \text{ कोज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^2 \frac{\text{रेप्या}}{८} \\ + \text{कोज्या}^4 \frac{\text{प्या}}{८} + \text{कोज्या}^4 \frac{\text{उप्या}}{८} = \frac{३}{२}$$

$$(२) \text{ ज्या}^2 \frac{\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^2 \frac{\text{रेप्या}}{७} \\ + \text{ज्या}^4 \frac{\text{प्या}}{८} + \text{ज्या}^4 \frac{\text{उप्या}}{८} = \frac{३}{२} \\ [\text{यनारस १९२७}]$$

$$(११) \left(१ + \text{स्प}^2 \frac{\text{अ}}{२} + \text{व्युत्कोज्या} \frac{\text{अ}}{२} \right) \times \\ \left(१ + \text{स्प}^2 \frac{\text{अ}}{२} - \text{व्युत्कोज्या} \frac{\text{अ}}{२} \right) \\ = \frac{२ \text{ ज्या अ}}{१ + \text{कोज्या अ}}$$

$$(१२) \text{ स्प}^2 \left(\frac{\text{प्या}}{४} - \frac{\text{क}}{२} \right) = \frac{\text{व्युत्कोज्या क} - \text{स्प क}}{\text{व्युत्कोज्या क} + \text{स्प क}}$$

$$(13) \quad \text{व्युज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{४} + \text{अ} \right) \text{व्युत्कोज्या} \left(\frac{\text{प्या}}{४} - \text{अ} \right) \\ = \frac{२}{(\text{कोज्या अ} + \text{ज्या अ})^२}$$

$$(14) \quad \text{ज्या क} = [\text{ज्या } (३६^{\circ} + \text{क}) - \text{ज्या } (३६^{\circ} - \text{क}) \\ - \text{ज्या } (७२^{\circ} + \text{क}) + \text{ज्या } (७२^{\circ} - \text{क})]$$

$$(15) \quad \text{जर व्युत्कोज्या (क + ख) + व्युत्कोज्या (क - ख)} \\ = २ \text{ व्युत्कोज्या क}$$

$$\text{असेल, तर कोज्या क} = \sqrt{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२}$$

है सिद्ध करा.

[पाठना १९४४]

$$(16) \quad \text{जर कोज्या अ} = \frac{\text{कोज्या इ} - \text{कोज्या ई}}{१ - \text{कोज्या इ कोज्या ई}}$$

$$\text{असेल तर } \text{स्प} \frac{\text{अ}}{२} \text{ ची एक अर्धा } \text{स्प} \frac{\text{इ}}{२} \text{ को } \text{स्प} \frac{\text{ई}}{२}$$

बाहे है सिद्ध करा.

[पाठना १९४२]

प्रकरण नववें

ऐकात्म्ये आणि त्रिकोणमितीय समीकार

९.१. तीन कोणांतबंधी योग-श्रमेय.

आता आपण ज्या (क+ख+ग), कोज्या (क+ख+ग) व स्य (क+ख+ग) यांचे विस्तार (expansions) काढू.

$$\begin{aligned}
 (१) \quad & \text{ज्या (क+ख+ग)} \\
 &= \text{ज्या (क+ख+ग)} \\
 &= \text{ज्या (क+ख)} \cos ग + \cos ज्या (क+ख) ज्या ग \\
 &= (\text{ज्या क कोज्या ख} + \cos ज्या क ज्या ख) कोज्या ग \\
 &\quad + (\cos ज्या क कोज्या ख - ज्या क ज्या ख) ज्या ग \\
 &= ज्या क कोज्या ख कोज्या ग \\
 &\quad + ज्या ख कोज्या ग कोज्या क \\
 &\quad + ज्या ग कोज्या क कोज्या ख \\
 &\quad - ज्या क ज्या ख ज्या ग
 \end{aligned}$$

हे सूत्र,

$$\begin{aligned}
 \text{ज्या (क+ख+ग)} &= \cos ज्या क कोज्या ख कोज्या ग \times \\
 &\quad [\text{स्य क} + \text{स्य ख} + \text{स्य ग} - \text{स्य क स्य ख स्य ग}] \\
 &\text{या रूपांतहि व्यक्त करता येते.}
 \end{aligned}$$

$$(२) \text{ कोज्या (क + ख + ग)}$$

$$= \text{कोज्या } (\overline{\text{क + ख + ग}})$$

$$= \text{कोज्या (क + ख)} \text{ कोज्या ग} - \text{ज्या (क + ख)} \text{ ज्या ग}$$

$$= (\text{कोज्या क कोज्या ख} - \text{ज्या क ज्या ख}) \text{ कोज्या ग}$$

$$- (\text{ज्या क कोज्या ख} + \text{कोज्या क ज्या ख}) \text{ ज्या ग}$$

$$= \text{कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग} - \text{कोज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

$$- \text{कोज्या ख ज्या ग ज्या क} - \text{कोज्या ग ज्या क ज्या ख}$$

है सूत्र,

$$\text{कोज्या (क + ख + ग)} = \text{कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग} \times$$

$$[१ - \text{स्प ख स्प ग} - \text{स्प ग स्प क} - \text{स्प क स्प ख}]$$

या रूपांतर्हि व्यक्त करतां येतें.

$$(३) \text{ स्प (क + ख + ग)} = \text{स्प } (\overline{\text{क + ख + ग}})$$

$$= \frac{\text{स्प (क + ख)} + \text{स्प ग}}{१ - \text{स्प (क + ख)} \text{ स्प ग}}$$

$$= \frac{\frac{\text{स्प क + स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ख}} + \text{स्प ग}}{१ - \frac{\text{स्प क + स्प ख}}{१ - \text{स्प क स्प ग}} \cdot \text{स्प ग}}$$

$$= \frac{\text{स्प क + स्प ख + स्प ग} - \text{स्प क स्प ख स्प ग}}{१ - \text{स्प ख स्प ग} - \text{स्प ग स्प क} - \text{स्प क स्प ख}}$$

उपस्थाप्यः— $\text{क + ख + ग} = १८०^\circ$ यस्यस्य स्प (क + ख + ग) शून्य होतो. म्हणून स्प (क + ख + ग) च्या विस्तारामधील अंश शून्य होतो.

म्हणून $\angle क + \angle ख + \angle ग = 180^\circ$ असल्यास

स्प $\angle क + \text{स्प } \angle ख + \text{स्प } \angle ग = \text{स्प } \angle क \text{ स्प } \angle ख \text{ स्प } \angle ग$

९.२ क, ख, ग या तीन कोणांचा योग जेव्हा 180° असतो तेव्हा त्यांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तींमध्ये अनेक ऐकात्म (identical) संबंध निर्माण होतात.

अशा ऐकात्म संबंधांच्या सिद्धतेची रीत खालील उदाहरणांवरून दिसून येईल.

उदाहरण १. क, ख, ग हे पक्षाच्या त्रिकोणाचे कोण असल्यास, ज्या $\angle क + \angle ख + \angle ग$

$$= 2 \cos \frac{\angle क}{2} \cos \frac{\angle ख}{2} \cos \frac{\angle ग}{2}$$

है सिद्ध करा.

धामपक्ष $= (\angle क + \angle ख) + \angle ग$

$$= 2 \cos \frac{\angle क + \angle ख}{2} \cos \frac{\angle क - \angle ख}{2} + 2 \cos \frac{\angle ग}{2} \cos \frac{\angle ग}{2}$$

धाता क, ख, ग एका त्रिकोणाचे कोण आहेत.

$$\therefore \angle क + \angle ख + \angle ग = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{\angle क + \angle ख}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ग}{2}$$

$$\text{म्हणून } \cos \frac{\angle क + \angle ख}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{\angle ग}{2} \right)$$

$$\text{च } \cos \frac{\angle क + \angle ख}{2} = \sin \frac{\angle ग}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{म्हणून वामपक्ष} &= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\
&\quad + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2} \\
&= 2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{B+C}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{A}{2}\cdot\left(2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) \\
&= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \\
&= \text{दक्षिणपक्ष}
\end{aligned}$$

उदाहरण २. जर $A+B+C=180^\circ$ असेल तर
 $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$
 $= -1 - 4\cos A \cos B \cos C$
 हे सिद्ध करा.

$$\begin{aligned}
\text{वामपक्ष} &= (\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C \\
&= 2\cos(A+B)\cos(A-B) + \cos 2C \\
&\quad + 2\cos(A+C)\cos(A-C)
\end{aligned}$$

$$\text{पण } A+B = 180^\circ - C$$

$$\begin{aligned}
\text{म्हणून } \cos(A+B) &= -\cos C \\
\text{म्हणून वामपक्ष} &= -2\cos C \cos(A-B) + 2\cos(A+C)\cos(A-C) \\
&= 2\cos C \left\{ -\cos(A-B) + \cos(A+C)\cos(A-C) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos A \left\{ -\cos A (\cos C - \sin C) \right. \\
&\quad \left. - \cos A (\cos C + \sin C) \right\} - 1 \\
&= 2 \cos A (-2 \cos A \cos C) - 1 \\
&= -1 - 4 \cos A \cos C \cos A
\end{aligned}$$

उदाहरण २. जर $A + B + C = 180^\circ$ असेल तर
 $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$
 $= 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

है सिद्ध करा.

$$\begin{aligned}
\text{वामपक्ष} &= \frac{1}{2} (2 \cos^2 A + 2 \cos^2 B) \\
&\quad - \cos^2 C \\
&= \frac{1}{2} (1 + \cos 2A) + \frac{1}{2} (1 + \cos 2B) \\
&\quad - \cos^2 C \\
&= 1 + \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2 C \\
&= 1 + \cos A \cos B \cos C - \cos^2 C
\end{aligned}$$

$$\text{पण } A + B = 180^\circ - C$$

$$\cos(A + B) = -\cos C$$

$$\begin{aligned}
\text{म्हणून वामपक्ष} &= 1 - \cos C \cos C \cos C \\
&\quad + \cos C \cos C \cos C
\end{aligned}$$

$$= 1 - \cos A \left\{ \cos A (\cos B - \cos C) \right. \\ \left. - \cos A (\cos B + \cos C) \right\}$$

$$= 1 - \cos A (2 \cos B \cos C) \\ = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$$

उदाहरण ४. जर $k + x + g = \pi$ या असेल तर

$$\cos \frac{k}{2} + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{g}{2} \\ = \cos \frac{k}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{g}{2}$$

हैं सिद्ध करा.

$$\text{आता } k + x + g = \pi$$

$$\therefore \frac{k}{2} + \frac{x}{2} + \frac{g}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{g}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{g}{2}}{1 - \sin \frac{x}{2} \sin \frac{g}{2}} = \cos \frac{k}{2} \\ = \frac{1}{\sin \frac{k}{2}}$$

$$\text{किंवा, } \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \right) = 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{किंवा, } \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1$$

कोस $\frac{\alpha}{2}$ कोस $\frac{\beta}{2}$ कोस $\frac{\gamma}{2}$ ने साद्यत गुणन,

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

अथवा:—

$$\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \infty$$

म्हणून वामपक्षाचा हर शून्य असला पाहिजे.

$$\therefore 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\text{किंवा, } \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 1$$

या समीकारास कोस $\frac{\alpha}{2}$ कोस $\frac{\beta}{2}$ कोस $\frac{\gamma}{2}$ ने साद्यत गुणिल्यास इष्ट फल मिळते.

उदाहरणसंग्रह १३

- (१) जर $k + x + g = 180^\circ$ मसेल तर सिद्ध करा की,
 $\text{ज्या}^2 k + \text{ज्या}^2 x + \text{ज्या}^2 g = 4 \text{ज्या} k \text{ज्या} x \text{ज्या} g$
 [धनारस १९४२]
- (२) $\text{कोज्या } k + \text{कोज्या } x + \text{कोज्या } g$
 $= 1 + 4 \text{ ज्या } \frac{k}{2} \text{ ज्या } \frac{x}{2} \text{ ज्या } \frac{g}{2}$
- (३) $\text{कोज्या } k + \text{कोज्या } x - \text{कोज्या } g$
 $= -1 + 4 \text{ कोज्या } \frac{k}{2} \text{ कोज्या } \frac{x}{2} \text{ ज्या } \frac{g}{2}$
- (४) $\text{कोज्या}^2 k + \text{कोज्या}^2 x + \text{कोज्या}^2 g$
 $= 1 - 2 \text{ कोज्या } k \text{ कोज्या } x \text{ कोज्या } g$
 [नागपूर १९४०]
- (५) $\text{ज्या}^2 k + \text{ज्या}^2 x + \text{ज्या}^2 g$
 $= 2 + 2 \text{ कोज्या } k \text{ कोज्या } x \text{ कोज्या } g$
 [धनारस १९४०]
- (६) $\text{ज्या}^2 k + \text{ज्या}^2 x - \text{ज्या}^2 g = 2 \text{ ज्या } k \text{ ज्या } x \text{ कोज्या } g$
 [धनारस १९४३]
- (७) $\text{ज्या}^2 \frac{k}{2} + \text{ज्या}^2 \frac{x}{2} + \text{ज्या}^2 \frac{g}{2}$
 $= 1 - 2 \text{ ज्या } \frac{k}{2} \text{ ज्या } \frac{x}{2} \text{ ज्या } \frac{g}{2}$
 [पाटणा १९४२]

$$(८) \text{ ज्या }^2\frac{क}{२} + \text{ज्या }^2\frac{ख}{२} - \text{ज्या }^2\frac{ग}{२}$$

$$= १ - २\text{कोज्या } \frac{क}{२} \text{कोज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}$$

[नागपूर १९४४]

$$(९) \text{ कोज्या } \frac{क}{२} + \text{कोज्या } \frac{ख}{२} + \text{कोज्या } \frac{ग}{२}$$

$$= ४\text{कोज्या } \frac{ख+ग}{४} \text{कोज्या } \frac{ग+क}{४} \text{कोज्या } \frac{क+ख}{४}$$

[मलाहाबाद १९३९]

$$(१०) \text{ कोज्या } \frac{क}{२} + \text{कोज्या } \frac{ख}{२} - \text{कोज्या } \frac{ग}{२}$$

$$= ४\text{कोज्या } \frac{प्या+क}{४} \text{कोज्या } \frac{प्या+ख}{४} \text{कोज्या } \frac{प्या-ग}{४}$$

[पाटना १९४२]

$$(११) \text{ ज्या } \frac{क}{२} + \text{ज्या } \frac{ख}{२} + \text{ज्या } \frac{ग}{२} - १$$

$$= ४\text{ज्या } \frac{प्या-क}{४} \text{ज्या } \frac{प्या-ख}{४} \text{ज्या } \frac{प्या-ग}{४}$$

[पाटना १९४१]

$$(१२) \text{ ज्या } (ख+ग-क) + \text{ज्या } (ग+क-ख)$$

$$+ \text{ज्या } (क+ख-ग) = ४\text{ज्या } क \text{ ज्या } ख \text{ ज्या } ग$$

[मलाहाबाद १९४०]

$$(13) \frac{\text{कोज्या (ग-ग)} + \text{कोज्या (ग-क)}}{\text{ज्या ग ज्या ग} + \text{ज्या ग ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या (क-ग)}}{\text{ज्या क ज्या ग}} = 8$$

[नागपूर १९४४]

$$(14) \text{कोस्प ग कोस्प ग} + \text{कोस्प ग कोस्प क} + \text{कोस्प क कोस्प ग} = 1$$

$$(15) \text{जर क} + \text{ख} + \text{ग} = \frac{\text{प्या}}{2} \text{ असेल तर सिद्ध करा की}$$

$$(1) \text{कोस्प क} + \text{कोस्प ग} + \text{कोस्प ग} = \text{कोस्प क कोस्प ख कोस्प ग}$$

$$(2) \text{ज्या}^2 \text{क} + \text{ज्या}^2 \text{ग} + \text{ज्या}^2 \text{ग} + 2 \text{ज्या क ज्या ख ज्या ग} = 1$$

[बलकृष्ण १९४३]

$$(3) \frac{\text{ज्या}^2 \text{क} + \text{ज्या}^2 \text{ग} + \text{ज्या}^2 \text{ग}}{\text{ज्या}^2 \text{क} - \text{ज्या}^2 \text{ख} + \text{ज्या}^2 \text{ग}} = \text{कोस्प क कोस्प ग}$$

$$(16) \text{जर इ} + \text{ई} = \text{उ असेल तर}$$

$$\text{कोज्या}^2 \text{इ} + \text{कोज्या}^2 \text{ई} - 2 \text{कोज्या इ कोज्या ई कोज्या उ} = \text{ज्या}^2 \text{उ हें निश्चि करा.}$$

[पाटणा १९३६]

$$(17) \text{जर क} + \text{ख} + \text{ग} = 0 \text{ असेल तर}$$

$$\text{स्प क} + \text{स्प ख} + \text{स्प ग} = \text{स्प क स्प ख स्प ग}$$

हें दाखवा. यावरून

$$\sqrt{3} + \text{स्प } 80^\circ + \text{स्प } 40^\circ = \sqrt{3} \text{स्प } 80^\circ \text{स्प } 40^\circ$$

हें दाखवा. [वनारस १९२५]

(१८) जर $k + ख + ग = २६$ असेल तर सिद्ध करा की
 ज्या $(६ - क)$, ज्या $(६ - ख)$ + ज्या $(६ - ग)$, ज्या ६
 $=$ ज्या $क$ ज्या $ख$
 [पाठना १९३२]

(१९) जर $य + र + ल = ४४$ असेल तर
 $य(१ - र^२)(१ - ल^२) + र(१ - ल^२)(१ - य^२)$
 $+ ल(१ - य^२)(१ - र^२) = ४४४४$
 हे सिद्ध करा.

(२०) जर $क + ख + ग = १८०$ असेल तर

$$\begin{vmatrix} ज्या^२क & कोस्य क & १ \\ ज्या^२ख & कोस्य ख & १ \\ ज्या^२ग & कोस्य ग & १ \end{vmatrix} = ०$$

हे सिद्ध करा.

[कलकत्ता बी. एन्सी. १९३१]

९.३ $ग < \sqrt{क^२ + ख^२}$ अतःचात
 क कोज्या $ख + ख ज्या अ = ग$

अशा रूपाचा त्रिकोणमितीय समीकार सोडविणे.

रीत १:— ज्यांत $अ$ घन, आणि $इ$ चे मान अल्पिष्ट एण
 घन आहे असे

$क = अ कोज्या इ,$

$ख = अ ज्या इ$

हे आदेश घ्या.

$$\text{यावरून } \alpha = \sqrt{क^2 + ख^2}$$

$$\text{ज्या } \delta = \frac{ख}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$$

$$\text{आणि कोज्या } \delta = \frac{क}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$$

क आणि ख दिलेले असल्यामुळे त्यांची चिन्हे इ चा चरण निश्चित करतात. नंतर वरील संबंधांच्या साहाय्याने α आणि δ चे मान ठरविता येते.

वरील आदेशांचा उपयोग केल्यावर दिलेल्या समीकाराचे α कोज्या $(\alpha - \delta) = \gamma$ या समीकारांत रूपांतर होते.

$$\begin{aligned} \text{आता, कोज्या } (\alpha - \delta) &= \frac{\gamma}{\alpha} \\ &= \frac{\gamma}{\sqrt{क^2 + ख^2}} \end{aligned}$$

या समीकाराचा दक्षिणपक्ष, $\gamma < \sqrt{क^2 + ख^2}$ असल्यामुळे, संख्येने एकापेक्षा लहान आहे. म्हणून $\frac{\gamma}{\sqrt{क^2 + ख^2}}$

ममान कोटिज्या असणारा δ ने निर्दिष्ट केलेला अल्पिष्ठ घन कोण, क, ख, γ माहीत असल्यामुळे निश्चित करता येऊन वरील समीकार

कोज्या $(\alpha - \delta) = \text{कोज्या } \delta$ असा लिहिता येतो.

म्हणून स शून्य क्रिया कोषतादि धन या ऋण पूर्णांक असल्यास

$$अ - १ = २ स या \pm ६$$

$$क्रिया अ = २ स या + ६ \pm ६$$

रीत २ :— दिलेल्या समीकार म्य $\frac{अ}{२}$ = प हा भादंदा करून सोडवितां येतो.

आतां, अनुच्छेद ८.१ धरून,

$$ज्या अ = \frac{२ स प \frac{अ}{२}}{१ + स प^२ \frac{अ}{२}} = \frac{२}{१ + प^२} \text{ (भादंदांने)}$$

$$प को ज्या अ = \frac{१ - स प^२ \frac{अ}{२}}{१ + स प^२ \frac{अ}{२}} = \frac{१ - प^२}{१ + प^२}$$

म्हणून दिलेल्या समीकाराचें रूपांतर

$$क \frac{१ - प^२}{१ + प^२} + स \frac{२ प}{१ + प^२} = ग$$

$$क्रिया प^२ (ग + क) - २ स प + (ग - क) = ०$$

हा प च्या वर्ग (quadratio) समीकार आहे, व त्यापासून प च्या दोन मूर्ती (समजा प, प_१) मिळतात.

$$पण प = अ स प \frac{अ}{२}$$

$$\therefore \frac{x}{2} = p, \text{ किंवा } p,$$

या समीकाराचें समाधान करणाऱ्या अ च्या ई, व ई, या अल्पिष्ठ धन अर्हा आहेत असे समजा.

$$\therefore \frac{x}{2} = x \text{ ई, किंवा } x \text{ ई.}$$

म्हणून स कोणताहि पूर्णांक असल्यास;

$$\frac{x}{2} = s \text{ प्या} + \text{ई, किंवा } s \text{ प्या} + \text{ई.}$$

$$\text{अर्थात् } x = 2s \text{ प्या} + 2\text{ई, किंवा } 2s \text{ प्या} + 2\text{ई.}$$

उदाहरण. ज्या अ + $\sqrt{3}$ कोज्या अ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

हा समीकार सोडवा.

[कलकत्ता १९३८]

समीकाराच्या दोन्ही पक्षांस $\sqrt{1+3}$ म्हणजे २ ने भागून,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ कोज्या अ} + \frac{1}{2} \text{ ज्या अ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{पण } \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{4},$$

$$\frac{1}{2} = \text{ज्या } \frac{\text{प्या}}{4},$$

$$\text{व } \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{4}$$

$$\text{म्हणून कोज्या अ कोज्या} \frac{\text{प्या}}{६} + ज्या अ ज्या \frac{\text{प्या}}{६} = \frac{१}{\sqrt{२}}$$

$$\text{किंवा कोज्या (अ - } \frac{\text{प्या}}{६} \text{)} = \text{कोज्या } \frac{\text{प्या}}{४}$$

$$\text{म्हणून अ - } \frac{\text{प्या}}{६} = २स \text{ प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$$

$$\text{किंवा अ} = २स \text{ प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४} + \frac{\text{प्या}}{६}$$

$$\text{किंवा अ} = २स \text{ प्या} + \frac{५\text{प्या}}{१२} \quad \text{किंवा } २स \text{ प्या} - \frac{\text{प्या}}{१२}$$

या समीकारावरून अ चा सामान्य अर्हो मिळते.

१०४ व्हाही प्रकारचे त्रिकोणमितीय समीकारे, योग आणि वियोग प्रमेयांचा उपयोग करून सोडविता येतात.

उदाहरण. ज्या ५ + ज्या २ य + ज्या ३ य = ० हा समीकार सोडवा.

$$\text{आता ज्या ५ + ज्या ३ य} = - \text{ज्या २ य}$$

म्हणून ७७ या अनुच्छेदाने,

$$२ \text{ ज्या २ य कोज्या य} = - \text{ज्या २ य}$$

$$\therefore \text{ज्या २ य} = ० \quad \text{किंवा } २ \text{ कोज्या य} = - १$$

$$\text{जर ज्या २ य} = ०, \text{ तर } २ य = स \text{ प्या}$$

$$\text{आता } - \frac{१}{२} \text{ ही कोटिज्या असलेला } \frac{२\text{प्या}}{३} \text{ हा अल्पघ्न}$$

घन कोण आहे.

महणून, जर कोज्या $y = -\frac{1}{2}$

$$\text{तर } y = 2 \text{ स प्या } \underline{-} \frac{2 \text{ प्या}}{3}$$

$$\therefore y = \frac{\text{स प्या}}{2} \text{ किंवा } 2 \text{ स प्या } \underline{+} \frac{2 \text{ प्या}}{3}$$

उदाहरणसंग्रह १४

पुढील समीकार सोडवा—

(१) ज्या $x +$ कोज्या $x = 1$ [मुंबई १९२८]

(२) ज्या $x + \sqrt{3}$ कोज्या $x = 1$ [मांघ्र १९४२]

(३) ३ ज्या $y + ४$ कोज्या $y = 2 - \frac{1}{2}$ [मांघ्र १९३३]

(स्प ३६°५२' = $\frac{3}{4}$ दिलेलो आहे.)

(४) व्युत्कोज्या $x - 1 = (\sqrt{2} - 1)$ स्प x [नागपूर १९४१]

(५) ध्युज्या $x =$ कोस्प $x + \sqrt{3}$ [नागपूर १९४६]

(६) क कोज्या $x +$ ग ज्या $x =$ ग या समीकाराचें समाधान करणाऱ्या इ व ई या x च्या भिन्न अर्ही असल्यास

ज्या $(इ + ई) = \frac{२ \text{ क र्ज}}{\text{क}^२ + \text{ग}^२}$ हें सिद्ध करा.

[नागपूर १९२५]

पुढील समीकार सोडया—

- (७) कोज्या य + कोज्या ३ य + कोज्या ५ य = ०
[धनारस १९३०]
- (८) कोज्या अ + ज्या २ अ - कोज्या ३ अ = ० [पाटणा १९३६]
- (९) कोज्या ३ अ + २ कोज्या अ = ० [नागपूर १९२५]
- (१०) १ + ज्या ४ अ = ३ ज्या अ कोज्या अ [नागपूर १९४४]
- (११) $\frac{\text{व्युत्कोज्या}^2 \text{ य}}{२} + \frac{\text{व्युज्या}^2 \text{ य}}{२} = १$ कोस्व य
[नागपूर १९४१]
- (१२) स्व अ + व्युत्कोज्या २ अ = १ [नागपूर १९४०]
- (१३) कोज्या ३ य + ज्या २ य = ० [नागपूर १९४२]
- (१४) कोज्या ३ अ कोज्या २ अ = कोज्या अ [नागपूर १९४३]
- (१५) कोज्या अ + कोज्या २ अ + कोज्या ३ अ = ०
- (१६) स्व अ + स्व २ अ + स्व ३ अ = ०
- (१७) कोज्या २ य - ज्या २ य = कोज्या य - ज्या य - १
[धनारस १९३८]
- (१८) कोज्या ३ अ - कोज्या ५ अ = ज्या अ
[धनारस १९३९]

प्रकरण दहावें

त्रिकोणाच्या भुजा व कोण यांमधील संबंध

१०.१ आता आपण कोणत्याहि त्रिकोणाच्या बाजू व त्याच्या कोणांच्या त्रिकोणमितीय निष्पत्ती यांमधील कांही संबंध प्रस्थापित करूं. त्रिकोणाचे कोण क, ख, ग या अक्षरांनी व त्यांच्या समोरील बाजू अनुक्रमे का, खा, गा या अक्षरांनी दर्शविल्या जातात.

१०.२ ज्या-नियम (law of the sines).

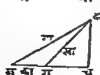
कोणत्याहि त्रिकोणांतील कोणांच्या ज्या त्यांच्या समोरील बाजूंशी अनुपाती असतात.

अर्थात् फक्त या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

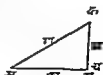
$$\frac{\text{ज्या क}}{\text{का}} = \frac{\text{ज्या ख}}{\text{खा}} = \frac{\text{ज्या ग}}{\text{गा}}$$



आकृति (अ)



आकृति (आ)



आकृति (इ)

जा. १०.१

फलन हा कोणताही त्रिकोण घेऊन क पासून खग पर फच हा लम्ब बाढा. आकृत्यांत दाखविल्याप्रमाणे, ग न्यूनकोण, अधिक (obtuse) कोण किंवा लंबकोण असेल तदनुसार ख हा बिंदु खग रेपेच्या आंत, बाहेर किंवा टोकापाशी राहील.

आता, सर्व आकृत्यांत फच खग ला लंब आहे.

$$\therefore \frac{\text{फच}}{\text{कख}} = ज्या ख,$$

किंवा फच = गा ज्या ख, (१)
पुन्हा, आकृति (घ) मधे

$$\frac{\text{फच}}{\text{कग}} = ज्या ग,$$

किंवा फच = ला ज्या ग
आकृति (आ) मधे

$$\frac{\text{फच}}{\text{कग}} = ज्या कगच$$

$$= ज्या (१८०^{\circ} - ग) = ज्या ग$$

किंवा फच = खा ज्या ग

आकृति (इ) मधे फच = कग = खा

ण या आकृतींत ग = ९०° असल्यामुळे ज्या ग = १

म्हणून या प्रकारांतहि

$$\text{फच} = खा ज्या ग$$

म्हणून सर्व आकृत्यांत,

$$कच = छा ज्या ग \dots\dots\dots(२)$$

(१) च (२) घटून,

$$गा ज्या ख = छा ज्या ग$$

$$\therefore \frac{ज्या ख}{छा} = \frac{ज्या ग}{गा}$$

तसेच, $\frac{ज्या क}{का} = \frac{ज्या ख}{छा}$ हे सिद्ध करता येईल.

$$\therefore \frac{ज्या क}{का} = \frac{ज्या ख}{छा} = \frac{ज्या ग}{गा}$$

१०.२१ कोटिज्या-नियम.

कलम वा कोणत्याही त्रिकोणांत,

$$\bullet \text{ कोज्या क} = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२ का खा}$$

$$\bullet \text{ कोज्या ख} = \frac{गा^2 + का^2 - खा^2}{२ गा का}$$

$$\text{कोज्या ग} = \frac{का^2 + खा^2 - गा^2}{२ का खा}$$

हे सिद्ध करतांना आपण घरील अनुच्छेदांतील आकृत्यांचा उपयोग करूं.

आकृति (अ) मधे, ग न्यूनकोण असतांना,

$$कख^2 = खग^2 + कग^2 - २खग \cdot गच$$

$$= खग^2 + कग^2 - २खग \cdot कग \text{ कोज्या ग}$$

$$\text{किंवा, गा}^2 = का^2 + खा^2 - २काखा \text{ कोज्या ग}$$

आकृति (आ) मध्ये, जेव्हा ग अधिककोण असतो ,
तेव्हा, $\text{कख}^2 = \text{खग}^2 + \text{फग}^2 + २\text{खग} \cdot \text{गच}$

$$= \text{खग}^2 + \text{फग}^2 + २\text{खग} \cdot \text{कग} \cos(\angle \text{ग})$$

$$= \text{खग}^2 + \text{फग}^2 - २\text{खग} \cdot \text{गच} \cos(\angle \text{ग})$$

किंवा, $\text{गा}^2 = \text{फा}^2 + \text{खा}^2 - २\text{फा} \cdot \text{खा} \cos(\angle \text{ग})$
हे फल मागील फलासमान आहे.

आकृति (इ) मध्ये, ग लंबकोण असताना,

$$\text{कख}^2 = \text{खग}^2 + \text{फग}^2$$

$$\text{किंवा, गा}^2 = \text{फा}^2 + \text{खा}^2$$

पण $\angle \text{ग} = ९०^\circ$, $\cos \angle \text{ग} = ०$ आहे. म्हणून हा

संबंध सुद्धा

$$\text{गा}^2 = \text{फा}^2 + \text{खा}^2 - \text{फा} \cdot \text{खा} \cos(\angle \text{ग})$$

या रूपांत लिहिता येतो. म्हणून तो सर्व त्रिकोणांकरिता सत्य
आहे.

$$\text{याचप्रमाणे, फा}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - २\text{फा} \cdot \text{गा} \cos(\angle \text{ख})$$

$$\text{खा}^2 = \text{गा}^2 + \text{फा}^2 - २\text{गा} \cdot \text{फा} \cos(\angle \text{ख})$$

हे संबंध सिद्ध करता येतात.

वरील संबंधांवरून,

$$\cos \angle \text{क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{फा}^2}{२\text{फा} \cdot \text{गा}}$$

$$\cos \angle \text{ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{फा}^2 - \text{खा}^2}{२\text{गा} \cdot \text{फा}}$$

$$\cos \angle \text{ग} = \frac{\text{फा}^2 + \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{२\text{फा} \cdot \text{खा}}$$

$$\text{पुन्हा } १ - \text{कोज्या } \phi = २ \text{ ज्या } \frac{\phi}{२}$$

म्हणून संरंघ () पुढीलप्रमाणे लिहितां येतो.

$$२ \text{ ज्या } \frac{\phi}{२} = \frac{२ (सा - खा) २ (सा - गा)}{२ खा गा}$$

$$\text{किंवा ज्या } \frac{\phi}{२} = \frac{(सा - खा) (सा - गा)}{खा गा}$$

$$\text{ज्या } \frac{\phi}{२} = \pm \sqrt{\frac{(सा - खा) (सा - गा)}{खा गा}}$$

आता, कोणत्याहि त्रिकोणांत,
 $\phi < १८०^\circ$

$$\therefore \frac{\phi}{२} < ९०^\circ$$

म्हणून ज्या $\frac{\phi}{२}$, कोज्या $\frac{\phi}{२}$, स्प $\frac{\phi}{२}$ नेहमी धन असतात. म्हणून ज्या $\frac{\phi}{२}$ च्या वरील सूत्रांतील, तसेंच पुढे काढण्यांत येणाऱ्या कोज्या $\frac{\phi}{२}$ आणि स्प $\frac{\phi}{२}$ यांच्या सूत्रातील चर्ग मूळाचीं चिन्हे धन च्याचीं लागतील.

$$\text{ज्या } \frac{\phi}{२} = \sqrt{\frac{(सा - खा) (सा - गा)}{खा गा}}$$

$$\text{तस्यैव, ज्या } \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{गा})(\text{सा}-\text{का})}{\text{गा का}}}$$

$$\text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{का})\text{सा}-\text{खा}}{\text{का खा}}}$$

$$\begin{aligned} \text{पुनः, } १ + \text{कोज्या क} &= १ + \frac{\text{खा}^२ + \text{गा}^२ - \text{का}^२}{२ \text{ खा गा}} \\ &= \frac{(\text{खा}^२ + \text{गा}^२ + २ \text{ खा गा}) - \text{का}^२}{२ \text{ खा गा}} \\ &= \frac{(\text{खा} + \text{गा})^२ - \text{का}^२}{२ \text{ खा गा}} \\ &= \frac{(\text{खा} + \text{गा} + \text{का})(\text{खा} + \text{गा} - \text{का})}{२ \text{ खा गा}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{परंतु, } (\text{खा} + \text{गा} - \text{का}) &= (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) - २ \text{ का} \\ &= २ \text{ सा} - २ \text{ का} = २ (\text{सा} - \text{का}) \end{aligned}$$

$$\text{अतः } १ + \text{कोज्या क} = २ \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} ,$$

अतः वरील समीकागचे रूपांतर

$$२ \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} = \frac{२ \text{ सा} \cdot २ (\text{सा} - \text{का})}{२ \text{ खा गा}}$$

$$\text{किंवा कोज्या } \frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})}{\text{खा गा}}$$

$$\therefore \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})}{\text{खा गा}}}$$

$$\text{तसेंच, कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{\text{मा (सा - खा)}}{\text{मा का}}}$$

$$\text{य कोज्या } \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{\text{मा (मा - गा)}}{\text{का खा}}}$$

$$\text{आता स्प } \frac{\text{क}}{२} = \frac{\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}}$$

म्हणून घरील फलांनुसार

$$\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} = \frac{\sqrt{\frac{\text{सा - खा}}{\text{मा मा}} (\text{सा - गा})}}{\sqrt{\frac{\text{मा (सा - का)}}{\text{खा मा}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\text{मा - खा}) (\text{सा - गा})}{\text{सा (सा - का)}}}$$

$$\text{तसेंच, स्प } \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{मा - गा}) (\text{मा - का})}{\text{सा (सा - खा)}}}$$

$$\text{य स्प } \frac{\text{ग}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा - का}) (\text{मा - खा})}{\text{सा (सा - गा)}}}$$

१०.५ त्रिकोणाच्या मुजांच्या रूपांत त्याच्या कोणत्याहि कोणाची ज्या व्यक्त करणें.

$$\text{आतां, ज्या क} = २ \text{ ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(sa - xa)(sa - ga)}{xa \cdot ga}} \times$$

$$\sqrt{\frac{sa(sa - ka)}{xa \cdot ga}}$$

[१०.४ अनुच्छेदने]

$$= \frac{2}{xa \cdot ga} \sqrt{sa(sa - ka)(sa - xa)(sa - ga)}$$

$$\text{तस्यैव, ज्या ख} = \frac{2}{ga \cdot ka} \sqrt{sa(sa - ka)(sa - xa)(sa - ga)}$$

$$\text{घ उपा ग} = \frac{2}{ka \cdot xa} \sqrt{sa(sa - ka)(sa - xa)(sa - ga)}$$

१०.६ कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,

$$\text{स्प} \left(\frac{sa - g}{2} \right) = \left(\frac{xa - ga}{2} \right) \text{कोस्प} \frac{k}{2}$$

$$\text{आता, स्प} \left(\frac{sa - g}{2} \right) \text{स्प} \frac{k}{2}$$

$$= \frac{\text{स्प} \frac{x}{2} \text{स्प} \frac{k}{2} - \text{स्प} \frac{g}{2} \text{स्प} \frac{k}{2}}{1 + \text{स्प} \frac{x}{2} \text{स्प} \frac{g}{2}}$$

$$= \frac{\text{स्प} \frac{x}{2} \text{स्प} \frac{k}{2} - \text{स्प} \frac{g}{2} \text{स्प} \frac{k}{2}}{1 + \text{स्प} \frac{x}{2} \text{स्प} \frac{g}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\frac{(\text{सा-गा}) (\text{मा-का})}{\text{सा} (\text{मा-खा})}} \sqrt{\frac{(\text{सा-खा}) (\text{सा-गा})}{\text{सा} (\text{मा-का})}}}{1 + \sqrt{\frac{(\text{सा-गा}) (\text{मा-का})}{\text{सा} (\text{सा-खा})}} \sqrt{\frac{(\text{सा-का}) (\text{सा-खा})}{\text{सा} (\text{सा-गा})}}} \\
& \frac{\sqrt{\frac{(\text{सा-का}) (\text{मा-खा})}{\text{सा} (\text{मा-गा})}} \sqrt{\frac{(\text{सा-खा}) (\text{सा-गा})}{\text{सा} (\text{मा-का})}}}{1 + \sqrt{\frac{(\text{सा-गा}) (\text{मा-का})}{\text{सा} (\text{सा-खा})}} \sqrt{\frac{(\text{सा-का}) (\text{सा-खा})}{\text{सा} (\text{सा-गा})}}} \\
& = \frac{\frac{\text{सा-गा}}{\text{सा}} - \frac{\text{सा-खा}}{\text{सा}}}{1 + \frac{\text{मा-का}}{\text{सा}}} \\
& = \frac{(\text{सा-गा}) - (\text{सा-खा})}{2\text{सा-का}} = \frac{\text{खा-गा}}{\text{सा+गा}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{स्प}\left(\frac{\text{ख-ग}}{2}\right) = \left(\frac{\text{खा-गा}}{\text{खा+गा}}\right) \text{कोस्प}\frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{तसैच, स्प}\left(\frac{\text{ग-फ}}{2}\right) = \left(\frac{\text{गा-फा}}{\text{गा+फा}}\right) \text{कोस्प}\frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{घ स्प}\left(\frac{\text{क-ख}}{2}\right) = \left(\frac{\text{का-खा}}{\text{का+खा}}\right) \text{कोस्प}\frac{\text{ग}}{2}$$

अभ्यासः— $\left(\frac{\text{खा-गा}}{\text{खा+गा}}\right)$ च कोणांच्या निष्पत्तीच्या

रूपांत परिवर्तन करून

$$\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \left(\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}\right) \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

हा संबंध सिद्ध करा.

१०.७ त्रिकोणाच्या भुजा व कोण यांनी युक्त असलेली अनेक ऐकात्म्ये आहेत. तीं, एकतर भुजांच्या जागी संवादी कोणांच्या निष्पत्तींचे आदेश करून किंवा कोणांच्या निष्पत्तींच्या जागी संवादी भुजांचे आदेश करून सिद्ध करता येतात.

उदाहरण १. कखग या कोणत्याहि त्रिकोणांत,
 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ क
 हे सिद्ध करा.

$$\text{समजा } \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = n$$

$$\therefore \sin \alpha = n \sin \alpha, \sin \beta = n \sin \beta, \sin \gamma = n \sin \gamma$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{वामपक्ष} &= 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ &+ 2 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \\ &+ 2 \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \\ &= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad (10.3 \text{ अनुच्छेदाने}) \\ &= \text{दक्षिण पक्ष} \end{aligned}$$

उदाहरण २. कलम या कोणत्याहि त्रिकोणांत

$$(खा + गा - का) \left(कोस्व \frac{ख}{२} + कोस्व \frac{ग}{२} \right) = २ का कोस्व \frac{क}{२}$$

हैं सिद्ध करा.

$$\text{आता, कोस्व } \frac{ख}{२} = \frac{१}{स्व \frac{ख}{२}} = \sqrt{\frac{सा (सा - खा)}{(सा - गा) (सा - का)}}$$

$$\text{घ कोस्व } \frac{ग}{२} = \frac{१}{स्व \frac{ग}{२}} = \sqrt{\frac{सा (सा - गा)}{(सा - का) (सा - खा)}}$$

(१०.४ अनुच्छेदानें)

$$\begin{aligned} \text{दियाय, } खा + गा - का &= (का + खा + गा) - २ का \\ &= २ सा - २ का = २ (सा - का) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{यामपक्ष} &= २ (सा - का) \left(\sqrt{\frac{सा (सा - गा)}{(सा - गा) (सा - का)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{सा (सा - खा)}{(सा - खा) (सा - का)}} \right) \end{aligned}$$

$$= २ (सा - का) \sqrt{\frac{सा}{(सा - का)}} \times$$

$$\left(\sqrt{\frac{(सा - गा)}{(सा - गा)}} + \sqrt{\frac{(सा - खा)}{(सा - खा)}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sqrt{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})} \\
&\quad \times \frac{(\text{सा}-\text{खा}) + (\text{सा}-\text{गा})}{\sqrt{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}} \\
&= 2 \sqrt{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})} \times \frac{\text{फा}}{\sqrt{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}} \\
&= 2\text{का कोस्य} \frac{\text{फ}}{2}
\end{aligned}$$

अन्यथा— भुजांश्च जागीं आदेश करुनहि वरील पेकात्म्य सिद्ध करतां येते.

१०.२ या अनुच्छेदावरून

$$\begin{aligned}
\frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{2\text{का}} &= \frac{\text{ज्या ख} + \text{ज्या ग} - \text{ज्या क}}{2\text{ज्या क}} \\
&= \frac{2\text{ज्या} \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \text{कोज्या} \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} - 2\text{ज्या} \frac{\text{फ}}{2} \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}}{2\text{ज्या क}}
\end{aligned}$$

$$\text{यण } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} = \frac{\text{ज्या}}{2} - \frac{\text{क}}{2}$$

$$\therefore \text{ज्या } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} = \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{व ज्या } \frac{\text{फ}}{2} = \text{कोज्या} \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{ग्या} + \text{गा} - \text{का}}{२\text{का}} \quad |$$

$$= \frac{२\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} - २\text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}}{२\text{ज्या}\text{क}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}\left(\text{कोज्या}\frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} - \text{कोज्या}\frac{\text{ख}+\text{ग}}{२}\right)}{४\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२} \cdot २\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}{४\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}\frac{\text{ख}}{२}\text{ज्या}\frac{\text{ग}}{२}}{\text{ज्या}\frac{\text{क}}{२}}$$

$$\text{दियाय, } \frac{\text{कोस्य}\frac{\text{क}}{२}}{\text{कोस्य}\frac{\text{ख}}{२} + \text{कोस्य}\frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}}{\text{ज्या } \frac{क}{२} \left(\text{ज्या } \frac{ग}{२} \text{ कोज्या } \frac{ख}{२} + \text{कोज्या } \frac{ग}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \right)}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}}{\text{ज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख+ग}{२}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{क}{२} \text{ ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}}{\text{ज्या } \frac{क}{२} \text{ कोज्या } \frac{क}{२}}$$

$$= \frac{\text{ज्या } \frac{ख}{२} \text{ ज्या } \frac{ग}{२}}{\text{ज्या } \frac{क}{२}}$$

$$\therefore \frac{ख + ग - का}{२ का} = \frac{\text{कोस्य } \frac{क}{२}}{\text{कोस्य } \frac{ख}{२} + \text{कोस्य } \frac{ग}{२}}$$

$$\begin{aligned} \text{किंवा } (ख + ग - का) \left(\text{कोस्य } \frac{ख}{२} + \text{कोस्य } \frac{ग}{२} \right) \\ = २ का \text{ कोस्य } \frac{क}{२} \end{aligned}$$

उदाहरण ३. कखग त्रिकोणांत का^२, खा^२, गा^२ समान्तर
 थेदींत असल्यास कोस्प क, कोस्प ख व कोस्प ग सुद्धा
 समांतर थेदींत असतात हें सिद्ध करा.

भाषणास

$$\text{कोस्प ख} - \text{कोस्प क} = \text{कोस्प ग} - \text{कोस्प ख}$$

किंवा कोस्प क + कोस्प ग = २कोस्प ख हें सिद्ध करावयाचें
 आहे.

हें सत्य असण्याकरितां

$$\frac{\text{कोज्या क}}{\text{ज्या क}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{ज्या ग}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{कोज्या क}}{\text{का}} + \frac{\text{कोज्या ग}}{\text{गा}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

(१०.२ अनुच्छेदाने)

$$\text{किंवा } \frac{\text{गा कोज्या क} + \text{का कोज्या ग}}{\text{का गा}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{खा}}$$

$$\text{किंवा } \frac{\text{खा}}{\text{का गा}} = \frac{२\text{कोज्या ख}}{\text{खा}}, \quad (१०.२ \text{ अनुच्छेदाने})$$

$$\text{किंवा } \text{खा}^२ = २ \text{ का गा कोज्या ख}$$

$$\text{किंवा } \text{खा}^२ = \text{गा}^२ + \text{का}^२ - \text{खा}^२,$$

(१०.२१ अनुच्छेदाने)

$$\text{किंवा } २\text{खा}^२ = \text{गा}^२ + \text{का}^२$$

सत्य मसावयास पाहिजे.

पण का^२, खा^२, गा^२ समांतर थेदींत असल्यामुळें हा
 संबंध सत्य आहे.

म्हणून कोरूप क , कोरूप ख , कोरूप ग समांतर ठेवता आहता.

उदाहरणसंग्रह १५

फलक या कोणत्याही त्रिकोणांत सिद्ध करा की,

$$(१) \quad का कोज्या \frac{ख-ग}{२} = (का+गा) ज्या \frac{क}{२}$$

$$(२) \quad \frac{का^२ ज्या (ख-ग)}{ज्या क} + \frac{का^२ ज्या (ग-क)}{ज्या ख} + \frac{गा^२ ज्या (क-ख)}{ज्या ग} = ०$$

$$(३) \quad का ज्या क - का ज्या ख = गा ज्या (क-ख) \\ [नागपूर १९२६] \\ [नागपूर १९४३]$$

$$(४) \quad अ कोणताही कोण असल्यास \\ का कोज्या अ = गा कोज्या (क-अ) \\ + का कोज्या (ग+अ) \\ [नागपूर १९४२]$$

$$(५) \quad (का-का+गा) र्ज \frac{ख}{२} = (का+का-गा) र्ज \frac{ग}{२} \\ [नागपूर १९४०]$$

$$(६) \quad \text{ख} \frac{\text{ग}}{२} \text{ख} \frac{\text{ग}}{२} = \frac{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}{\text{खा} + \text{गा} + \text{का}} \quad [\text{नागपूर १९३४}]$$

$$(७) \quad (\text{का} + \text{खा} + \text{गा}) \left(\text{ख} \frac{\text{क}}{२} + \text{ख} \frac{\text{ख}}{२} \right) = २ \text{ गा कोख} \frac{\text{ग}}{२}$$

$$(८) \quad \text{का ज्या (ख-ग)} + \text{खा ज्या (ग-क)} \\ + \text{गा ज्या (क-ख)} = ० \\ [\text{बनारस १९३८}]$$

$$(९) \quad \frac{\text{का}^२ \text{ ज्या (ख-ग)}}{\text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}} + \frac{\text{खा}^२ \text{ ज्या (ग-क)}}{\text{ज्या ग} + \text{ज्या क}} \\ + \frac{\text{गा}^२ \text{ ज्या (क-ख)}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}} = ० \\ [\text{बनारस १९४१}]$$

$$(१०) \quad \frac{\text{ज्या (क-ख)}}{\text{ज्या (क+ख)}} = \frac{\text{का}^२ - \text{खा}^२}{\text{गा}^२} \quad [\text{अलाहाबाद १९४१}]$$

$$(११) \quad (\text{खा-गा}) \text{ कोख} \frac{\text{क}}{२} + (\text{गा-का}) \text{ कोख} \frac{\text{ख}}{२} \\ + (\text{का-खा}) \text{ कोख} \frac{\text{ग}}{२} = ० \\ [\text{पाटना १९४४}]$$

$$(१२) \quad (\text{खा-गा}) \text{ कोज्या} \frac{\text{क}}{२} = \text{का ज्या} \frac{\text{ख-ग}}{२} \\ [\text{पाटना १९४२}]$$

(१३) कखग त्रिकोणाच्या का, खा, गा या भुजा अशा ओहूत कीं $२खा^२ = का^२ + गा^२$. तर

$$\frac{\text{ज्या रे ख}}{\text{ज्या ख}} = \left(\frac{\text{का}^२ - \text{गा}^२}{२ का गा} \right)^२ \text{ हें दाखवा.}$$

[नागपूर १९४६]

(१४) कखग त्रिकोणांत का कोज्या क = खा कोज्या ख असल्यास एकतर का = खा, किंवा ग हा लंबकोण आहे हें सिद्ध करा.

[अलाहाबाद १९४२]

(१५) कखग त्रिकोणांत कोज्या ख = $\frac{\text{ज्या क}}{२ \text{ ज्या ग}}$ असेल तर हा त्रिकोण समद्विभुज आहे हें दाखवा.

[पुनारस १९४४]

(१६) कोणत्याहि त्रिकोणाच्या बाजू समांतर श्रेढींत असल्यास त्या त्रिकोणाच्या अर्धकोणांच्या कोटिस्पर्शज्याहि समांतर श्रेढींत असतात हें सिद्ध करा.

(१७) कखग त्रिकोणांत $\text{स्प } \frac{\text{फ}}{२} = \frac{५}{६}$ व $\text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} = \frac{२०}{३७}$ असल्यास $\text{स्प } \frac{\text{ग}}{२}$ काढा व या त्रिकोणांत का + गा = २खा आहे हें दाखवा.

[नागपूर १९४२]

(१८) कखग या त्रिकोणांतील खग या आधारावर च हा असा बिंदु आहे की $\frac{\text{खच}}{\text{चग}} = \frac{\text{म}}{\text{न}}$, आणि जर

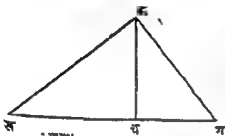
$\angle \text{खकच} = \text{इ}$, $\angle \text{घकग} = \text{ई}$ च $\angle \text{गचक} = \text{अ}$ असेल
 तर सिद्ध करा की

$(\text{म} + \text{न})$ कोरूप $\text{अ} = \text{म कोरूप इ} - \text{न कोरूप ई}$
 $= \text{न कोरूप ख} - \text{म कोरूप ग}$

प्रकरण अकरावें

त्रिकोणाचे गुणधर्म (properties)

११.१ त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ.



कखग हा एक त्रिकोण असून कच हा क पासून खग वर काढलेला रेषा आहे.

आ ११.१

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ Δ ने दर्शवा.

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}(\text{आधार} \times \text{उंची}) = \frac{1}{2} \text{खग.कच}$$

$$= \frac{1}{2} \text{खग.कख ज्या ख} = \frac{1}{2} \text{गा का ज्या ख}$$

$$\text{किंवा} = \frac{1}{2} \text{का खा ज्या ग, (कारण गा ज्या ख = खा ज्या ग)}$$

$$\text{किंवा} = \frac{1}{2} \text{खा गा ज्या क, (कारण का ज्या ग = गा ज्या क)}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} \text{खा गा ज्या क} = \frac{1}{2} \text{गा का ज्या ख} = \frac{1}{2} \text{का खा ज्या ग}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}(\text{दोन बाजूंचे गुणनफल}) \times$$

(त्यांच्या अंतर्गत कोणाची ज्या)

$$\text{यात्रा } \Delta = \frac{1}{2} \text{खा गा ज्या क}$$

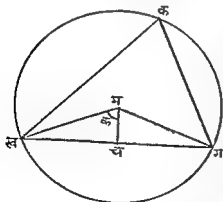
$$= \text{खा गा ज्या } \frac{\text{क}}{2} \text{कोज्या } \frac{\text{क}}{2}$$

$$= \text{खा गा } \sqrt{\frac{(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}{\text{खा गा}}} \cdot \sqrt{\frac{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})}{\text{खा गा}}}$$

$$= \sqrt{\text{सा}(\text{सा}-\text{का})(\text{सा}-\text{खा})(\text{सा}-\text{गा})}$$

हे सूत्र त्रिकोणाचे क्षेत्रफल भुजांच्या रूपांत देते.

११.२ कोणत्याही त्रिकोणाला परिलिखित (circumscribing) करणाऱ्या घृत्ताची त्रिज्या.



आ. ११.२

कसग त्रिकोणाला परिलिखित करणाऱ्या घृत्ताचे म हे केंद्र असून आ त्याची त्रिज्या आहे.

∠ खमग दुभागणारी मच ही रेखा काढा. मच खगची लंबद्विभाजक आहे.

रैखिकीने, केंद्राशी असलेला $\angle खमग = 2 \angle खकग = 2क$

$$\therefore \angle खमच = \frac{1}{2} \angle खमग = क$$

माता खच = खम ज्या खमच

$$पण खच = \frac{का}{२}$$

आणि खम = घा

$$\therefore \frac{का}{२} = घा जा क$$

$$\therefore घा = \frac{का}{२ ज्या क}$$

$$\therefore \text{त्याचप्रमाणे, } घा = \frac{खा}{२ ज्या ख}$$

$$घा = \frac{गा}{२ ज्या ग}$$

$$\therefore \frac{का}{ज्या क} = \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{गा}{ज्या ग} = २ घा$$

फोणत्यादि त्रिकोणास परिलिखित करणाऱ्या घुत्ताला परिघृत्त (circumcircle), त्याच्या केंद्रास परिकेंद्र (circumcentre) व त्याच्या त्रिज्येस परित्रिज्या (circum-radius) म्हणतात.

उपसाध्य :-

$$का = २ घा ज्या क,$$

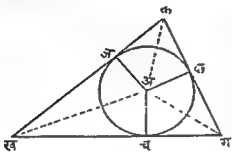
$$खा = २ घा ज्या ख,$$

$$गा = २ घा ज्या ग$$

११.२१ परित्रिज्या भुजांच्या रुपांत व्यक्त करतां येते.

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\text{फा}}{२\text{ज्या क}} = \frac{\text{का खा गा}}{२\text{खा गा ज्या क}} \\ &= \frac{\text{का खा गा}}{४\Delta} \end{aligned} \quad (११.१ \text{ अनुच्छेदाने})$$

११.३ कोणत्याही त्रिकोणांत अंतर्लिखित केलेल्या वृत्ताची त्रिज्या.



आ. ११३

समजा, कखग त्रिकोणांत अंतर्लिखित केलेल्या वृत्ताचें अं हे केंद्र असून च, छ, ज हे त्रिकोणाच्या भुजांचे स्पर्शबिंदू आहेत. अच, अछ, अज हे भुजांना लंब आहेत आणि

त्यांपैकी प्रत्येकाची लांबी वृत्तत्रिज्या अ पयली आहे.

आता, कखग त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ

= खअग, गअक च कअख या त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळांचा योग

$$\therefore \Delta = \frac{१}{२} \text{खग.अच} + \frac{१}{२} \text{गक.अछ} + \frac{१}{२} \text{कख.अज}$$

$$= \frac{१}{२} \text{का अ} + \frac{१}{२} \text{खा अ} + \frac{१}{२} \text{गा अ}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ प्र (का + खा + गा)}$$

$$= \text{प्र सा, } (\because \text{का + खा + गा} = 2\text{सा})$$

$$\therefore \text{प्र} = \frac{\Delta}{\text{सा}}$$

कोणत्याहि त्रिकोणांत अंतर्लिखित केलेल्या वृत्तास अंतर्वृत्त (incircle), त्याच्या केंद्रास अंतःकेंद्र (incentre) व त्रिज्येस अंतस्त्रिज्या (inradius) म्हणतात.

टीप. शिरोबिंदूंचीं (vertices) अंतःकेंद्रापासून अंतरं.

Δ फअज घरून,

अक = अज व्युज्या अकज

$$\therefore \text{अक} = \text{प्र व्युज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{तसेच, अख} = \text{प्र व्युज्या} \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{अग} = \text{प्र व्युज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

११.११ प्र करितां दुसरें एक व्यंजक.

मागील अनुच्छेदाच्या आधर्तात, त्रिकोणाचे कोण दुभागणाऱ्या रेषांचा अ हा छेदनाविंदु आहे.

$$\text{म्हणून, } \angle \text{अखच} = \frac{\text{ख}}{2}, \angle \text{अगच} = \frac{\text{ग}}{2}$$

\therefore अखच, यगच त्रिकोणांवरून,
 खच = त्र कोस् $\frac{ख}{२}$, गच = त्र कोस् $\frac{ग}{२}$

शाता, खच + गच = का

$$\therefore त्र \left(कोस् \frac{ख}{२} + कोस् \frac{ग}{२} \right) = का$$

$$\therefore \frac{त्र \left(कोज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२} + कोज्या \frac{ग}{२} ज्या \frac{ख}{२} \right)}{ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}} = का$$

किंवा त्र ज्या $\left(\frac{ख + ग}{२} \right) = का ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}$

शाता, फलन त्रिकोणांत

$$\frac{ख + ग}{२} = ९०^{\circ} - \frac{क}{२}$$

$$\therefore ज्या \frac{ख + ग}{२} = कोज्या \frac{क}{२}$$

$$\therefore त्र = \frac{का ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}}{कोज्या \frac{क}{२}}$$

पण का = २ त्रा ज्या क = ४ त्रा ज्या $\frac{क}{२}$ कोज्या $\frac{क}{२}$

$$\therefore \text{प्र} = ४ \text{ प्रा ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२} ;$$

वैकल्पिक (alternative) रीत—

$$\text{साता, प्र} = \frac{\Delta}{\text{सा}} = \frac{२ \Delta}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$$

$$= \frac{\text{खा गा ज्या क}}{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}$$

$$= \frac{२ \text{ प्रा ज्या ख. } २ \text{ प्रा ज्या ग. ज्या क}}{२ \text{ प्रा (ज्या क + ज्या ख + ज्या ग)}}$$

$$= \frac{२ \text{ प्रा ज्या क ज्या ख ज्या ग}}{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख} + \text{ज्या ग}}$$

पण ९.२ अनुच्छेदांशील उदाहरण १ धरून

ज्या क + ज्या ख + ज्या ग

$$= ४ \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

$$\therefore \text{प्र} = \frac{१६ \text{ प्रा ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}}{४ \text{ कोज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= ४ \text{ प्रा ज्या } \frac{\text{क}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ख}}{२} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

११.३२ अ करिता आपली एक व्यंजक.

११.३. या अनुच्छेदांतील आहूर्तीत, खच व खज अंतर्वृत्ताच्या, स या एकाच विंदूपासून असलेल्या, दोन स्पर्शरेषा आहेत.

$$\therefore \text{खच} = \text{खज}$$

$$\text{त्याचप्रमाणे, गच} = \text{गछ}$$

$$\text{व कछ} = \text{कज}$$

$$\text{आता, परिमाण २सा} = (\text{कछ} + \text{कज}) + (\text{खज} + \text{खच}) \\ + (\text{गच} + \text{गछ})$$

$$\therefore \text{सा} = \text{कज} + \text{खच} + \text{चग} = \text{कज} + \text{का}$$

$$\text{किंवा कज} = \text{सा} - \text{का}$$

आता, कजज त्रिकोणावरून,

$$\frac{\text{धज}^{\circ}}{\text{कज}} = \text{स्प } 2$$

$$\therefore \text{अ} = \text{कज स्प } 2$$

$$\text{किंवा अ} = (\text{सा} - \text{का}) \text{ स्प } 2$$

$$\text{तसेच, अ} = (\text{सा} - \text{खा}) \text{ स्प } \frac{1}{2}$$

$$\text{अ} = (\text{सा} - \text{गा}) \text{ स्प } \frac{1}{2}$$

वैकल्पिक रीत—

$$\text{आता अ} = \frac{\Delta}{\text{सा}}$$

$$= \frac{\sqrt{सा (सा - का) }}{सा}$$

$$= \sqrt{\frac{(सा - का) (सा -$$

$$= (सा - का) \sqrt{\frac{(सा - खा) ($$

$$= (सा - का) \text{ स्प } \frac{क}{२}$$

$$\text{तसेंच, प्र} = (सा - खा) \text{ स्प } \frac{ख}{२}$$

$$\text{प्र} = (सा - गा) \text{ स्प } \frac{ग}{२}$$

११.४ कोणत्याहि त्रिकोणाच्या पक्षा याजूस घ बाकीच्या दोन बाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करणाऱ्या घृत्तास बाह्यलिखित घृत्त (escribed circle) म्हणतात. प्रत्येक त्रिकोणाला तीन बाह्यलिखित घृत्त असतात. कलम त्रिकोणाच्या तीन बाह्यलिखित घृत्तांपैकी एक घृत्त खग ला च कख, कग या बाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करतें; दुसरें गक ला च खग, खक या बाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करतें; तिसरें कल ला घ गक, गख या बाढविलेल्या बाजूंना स्पर्श करतें. बाह्यलिखित घृत्तांना बाह्यघृत्त (excircles), त्यांच्या केंद्रांना बाह्यकेंद्र (excentres), च त्यांच्या त्रिज्यांना बाह्यत्रिज्या (exradii) म्हणतात.

$$\therefore अ, ख = अ, व्युत्क्रोश्या \frac{ख}{२}$$

$$तसंच, अ, ग = अ, व्युत्क्रोश्या \frac{ग}{२}$$

अ, ख, हीं अनुक्रमे ख आणि ग या कोणांसमोरील बहिष्केंद्रे असतील तर त्यांची शिरोत्रिभूपासून अंतरं अशाच रीतीने काढतां येतील.

शियाय $\angle खम, ग = \angle खम, घ, + \angle गम, घ,$
आता खच, अ, ज, चक्रिक चौकोण आहे.

$$\therefore \angle खम, घ, = \frac{ख}{२}$$

$$तसंच, \angle गम, घ, = \frac{ग}{२}$$

$$\therefore \angle खम, ग = \frac{ख}{२} + \frac{ग}{२}$$

$$= ९०^{\circ} - \frac{फ}{२}$$

$$तसंच, \angle गम, फ = ९०^{\circ} - \frac{ख}{२},$$

$$\angle फम, अ = ९०^{\circ} - \frac{ग}{२}$$

११.४२ बहिस्त्रिज्यांकरिता दुमरी व्यंजक.

मागील अनुच्छेदाच्या आह्मीत, अ, हा, ख आणि ग हे बाह्यकोण दुभागणाऱ्या रेषांचा छेदनबिंदु अ.दे.

$$\therefore \angle \text{अ, खच,} = 90^\circ - \frac{\text{ग}}{2},$$

$$\angle \text{अ, गच,} = 90^\circ - \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\therefore \Delta \text{अ, खच, घकन, खच,} = \text{त्र, कोस्य} \left(90^\circ - \frac{\text{ग}}{2} \right) \\ = \text{त्र, रप} \frac{\text{ख}}{2}$$

$\Delta \text{अ, गच, घकन}$

$$\text{गच,} = \text{त्र, कोस्य} \left(90^\circ - \frac{\text{ग}}{2} \right) = \text{त्र, रप} \frac{\text{ग}}{2}$$

एष खच, + गच, = का

$$\therefore \text{त्र,} \left(\text{रप} \frac{\text{ख}}{2} + \text{रप} \frac{\text{ग}}{2} \right) = \text{का}$$

$$\text{किंवा, त्र, ज्या} \left(\frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \right) = \text{का कोज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\therefore \text{त्र,} = \frac{\text{का कोज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या} \frac{\text{ग}}{2}}{\text{कोज्या} \frac{\text{क}}{2}}$$

आता, का = २ वा ज्या क

$$= ४ \text{ वा ज्या} \frac{\text{क}}{२} \text{ कोज्या} \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{त्याचप्रमाणे, } \text{प्र}_2 = \frac{\text{क}}{2} \text{ वा कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

$$\text{प्र}_2 = \frac{\text{क}}{2} \text{ वा कोज्या } \frac{\text{ख}}{2} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{2}$$

वैकल्पिक रीत—

$$\text{आता, } \text{प्र}_1 = \frac{\Delta}{\text{सा} - \text{का}} = \frac{2\Delta}{2\text{सा} - 2\text{का}}$$

$$= \frac{\text{खा गा ज्या क}}{\text{खा} + \text{गा} - \text{का}}$$

$$= \frac{2 \text{ वा ज्या ख. } 2 \text{ वा ज्या ग. ज्या क}}{2 \text{ वा (ज्या ख} + \text{ज्या ग} - \text{ज्या क)}}$$

$$= \frac{2 \text{ वा ज्या क ज्या ख ज्या ग}}{(ज्या ख + ज्या ग - ज्या क)}$$

$$\text{आता, ज्या ख} + \text{ज्या ग} - \text{ज्या क}$$

$$= \frac{2\Delta}{\text{गा का}} + \frac{2\Delta}{\text{का खा}} - \frac{2\Delta}{\text{खा गा}}$$

(११-१ अनुच्छेदाने)

$$= \frac{2\Delta}{\text{काखागा}} (\text{खा} + \text{गा} - \text{का})$$

$$= \frac{2}{\text{काखागा}} \times \sqrt{\text{सा} (\text{सा} - \text{का})(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})} \times$$

$$(2\text{सा} - 2\text{का})$$

$$कछ_1 = कज_1 = मा$$

$$\Delta अ_1 कज_1 घरून,$$

$$अ_1 ज_1 = कज_1 स्फ \frac{क}{२}$$

$$किंवा अ_1 = सा स्फ \frac{क}{२}$$

$$तसेंच, अ_1 = सा स्फ \frac{ख}{२}$$

$$अ_1 = सा स्फ \frac{ग}{२}$$

वैकल्पिक रीत—

$$आता, अ_1 = \frac{\Delta}{सा - का}$$

$$= \frac{\sqrt{सा (सा - का) (सा - खा) (सा - गा)}}{(सा - का)}$$

$$= \sqrt{\frac{सा (सा - खा) (सा - गा)}{(सा - का)}}$$

$$= सा \sqrt{\frac{(सा - खा) (सा - गा)}{सा (सा - का)}}$$

$$अ_1 = सा स्फ \frac{क}{२}$$

$$तसेंच, अ_1 = सा स्फ \frac{ख}{२}$$

$$अ_1 = सा स्फ \frac{ग}{२}$$

$$\therefore \text{कछ,} = \text{कज,} = \text{सा}$$

$$\Delta \text{ भ, कज, घरुन,}$$

$$\text{ध, ज,} = \text{कज, स्फ} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{दिया प्र,} = \text{सा स्फ} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{तसेच, प्र,} = \text{सा स्फ} \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{प्र,} = \text{सा स्फ} \frac{\text{ग}}{2}$$

धैराविक रीत—

$$\text{भाता, प्र,} = \frac{\Delta}{\text{सा - का}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{सा (सा - का) (सा - छा) (सा - गा)}}}{(\text{सा - का})}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{सा (सा - छा) (सा - गा)}}{(\text{सा - का})}}$$

$$= \text{सा} \sqrt{\frac{(\text{सा - छा) (सा - गा)}}{\text{सा (सा - का)}}}$$

$$\therefore \text{प्र,} = \text{सा स्फ} \frac{\text{क}}{2}$$

$$\text{तसेच, प्र,} = \text{सा स्फ} \frac{\text{ख}}{2}$$

$$\text{प्र,} = \text{सा स्फ} \frac{\text{ग}}{2}$$

११.५ उदाहरण १. सिद्ध करा—

$$\Delta = २ \text{ चा }^२\text{ज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

$$२ \text{ चा }^२\text{ज्या क ज्या ख ज्या ग} = २ \text{ चा }^२ \cdot \frac{\text{का}}{२\text{चा}} \cdot \frac{\text{खा}}{२\text{चा}} \cdot \frac{\text{गा}}{२\text{चा}}$$

(११.२ अनुच्छेदाने)

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{का खा गा}}{४ \text{ चा}} \\ \therefore &= \Delta \quad (११.२१ अनुच्छेदाने) \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta = २ \text{ चा }^२\text{ज्या क ज्या ख ज्या ग}$$

उदाहरण २. सिद्ध करा—

$$(\text{प्र}_१ + \text{प्र}_२) \text{ स्प } \frac{\text{ग}}{२} = (\text{प्र}_३ - \text{प्र}) \text{ को स्प } \frac{\text{ग}}{२} = \text{गा}$$

$$\text{आता, } (\text{प्र}_१ + \text{प्र}_२) \text{ स्प } \frac{\text{ग}}{२} = \left(\text{सा स्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{सा स्प } \frac{\text{ख}}{२} \right) \text{ स्प } \frac{\text{ग}}{२}$$

(११.४३ या अनुच्छेदाने)

$$\begin{aligned} &= \text{सा स्प } \frac{\text{ग}}{२} \left(\text{स्प } \frac{\text{क}}{२} + \text{स्प } \frac{\text{ख}}{२} \right) \\ &= \text{प्र}_३ \left(\frac{\text{ज्या } \frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२}} + \frac{\text{ज्या } \frac{\text{ख}}{२}}{\text{कोज्या } \frac{\text{ख}}{२}} \right) \end{aligned}$$

$$= प्र, \frac{\text{ज्या} \left(\frac{फ + ग}{२} \right)}{\text{कोज्या} \frac{फ}{२} \text{कोज्या} \frac{ग}{२}}$$

$$= प्र, \frac{\text{कोज्या} \frac{ग}{२}}{\text{कोज्या} \frac{फ}{२} \text{कोज्या} \frac{ग}{२}} \cdot \left(\because \frac{फ + ग}{२} = ९०^\circ - \frac{ग}{२} \right)$$

$$= ४ प्रा कोज्या \frac{फ}{२} \text{कोज्या} \frac{ग}{२} \text{ज्या} \frac{ग}{२} \times$$

$$\frac{\text{कोज्या} \frac{ग}{२}}{\text{कोज्या} \frac{फ}{२} \text{कोज्या} \frac{ग}{२}} \quad (११.४२ \text{ अनुच्छेदाने})$$

$$= ४ प्रा ज्या \frac{ग}{२} \text{कोज्या} \frac{ग}{२}$$

$$= २ प्रा ज्या ग = गा$$

$$\text{शियाय, (प्र, - प्र) कोस्प} \frac{ग}{२} = \left\{ \text{सा स्प} \frac{ग}{२} - (\text{सा} - \text{गा}) \times \right. \\ \left. \text{स्प} \frac{ग}{२} \right\} \text{कोस्प} \frac{ग}{२}$$

$$(११.३२ व ११.४३ या अनुच्छेदांवरून)$$

$$= (\text{सा} - \text{सा} - \text{गा}) = \text{गा}$$

$$\therefore (x_1 + x_2) \text{ स्प } \frac{y}{2} = (x_3 - x) \text{ को स्प } \frac{y}{2} = y$$

उदाहरण ३. सिद्ध करा—

$$(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) = \Delta \text{ वा } x^3$$

११.३ व ११.४१ या अनुच्छेदांवरून,

$$(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)$$

$$= \left(\frac{\Delta}{sa - ka} - \frac{\Delta}{sa} \right) \left(\frac{\Delta}{sa - la} - \frac{\Delta}{sa} \right) \left(\frac{\Delta}{sa - ga} - \frac{\Delta}{sa} \right)$$

$$= \frac{\Delta^3 (sa - sa - ka)(sa - sa - la)(sa - sa - ga)}{sa^3 (sa - ka)(sa - la)(sa - ga)}$$

$$= \frac{\Delta^3 ka la ga}{sa^3 \Delta^3}$$

$$= \frac{\Delta ka la ga}{sa^3}$$

$$= \frac{\Delta^3}{sa^3} \cdot \left(\frac{ka la ga}{\Delta} \right)$$

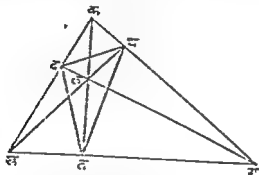
$$= \Delta^3 \text{ वा } x^3 \quad (\text{अनु० ११ २१})$$

$$(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) = \Delta \text{ वा } x^3$$

११.६ त्रिकोणाच्या भुजांपासून व कोनाविंदुंपासून (angular points) लंबकेंद्राची (orthocentre) अंतरे.

कमग त्रिकोणाच्या शिरोविंदुंपासून समोरील बाजूपर्यंत, खय व गद् हे लंब काढा. या तीन रेषांचा छेदनबिंदु ल, त्रिकोणाचे लंबकेंद्र आहे.

तय, थद, दत जोडा. तथद् हा कमग त्रिकोणाचा पादिक (pedal) त्रिकोण आहे.



श्री. ११.५

कखत त्रिकोणांत,

$$\begin{aligned} \text{खत} &= \text{कग कोज्या ख} \\ &= \text{गा कोज्या ख} \end{aligned}$$

गखथ त्रिकोणांत,

$$\angle \text{गखथ} = 90^\circ - \text{ग}$$

लखत त्रिकोणांत,

$$\begin{aligned} \frac{\text{लत}}{\text{खत}} &= \text{रूप तखल} \\ &= \text{रूप गखथ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{लत} &= \text{खत रण मखथ} \\
 &= \text{गा कोज्या ख रण } (90^\circ - \text{ग}) \\
 &= \text{गा कोज्या ख कोरुण ग} \\
 \text{पण गा} &= २ वा ज्या ग
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{लत} &= २ वा कोज्या ख कोज्या ग \\
 \text{त्याचप्रमाणे, लथ} &= २ वा कोज्या ग कोज्या क \\
 \text{लद} &= २ वा कोज्या क कोज्या ख \\
 \text{पुन्हा, फखथ त्रिकोणांत,} \\
 \text{कथ} &= \text{कख कोज्या क} = \text{गा कोज्या क} \\
 \text{याणि कतत त्रिकोणांत,} \\
 \angle \text{गकत} &= 90^\circ - \text{ग}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta \text{कलथ मध्ये, } \frac{\text{फल}}{\text{कथ}} &= \frac{\text{व्युत्कोज्या थकत}}{\text{व्युत्कोज्या गकत}} \\
 &= \frac{\text{व्युत्कोज्या गकत}}{\text{व्युत्कोज्या गकत}}
 \end{aligned}$$

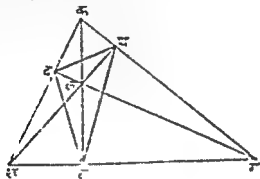
$$\begin{aligned}
 \therefore \text{फल} &= \text{कथ व्युत्कोज्या गकत} \\
 &= \text{गा कोज्या क व्युत्कोज्या } (90^\circ - \text{ग}) \\
 &= \text{गा कोज्या क व्युत्कोज्या ग} \\
 &= २ वा ज्या ग, कोज्या क व्युत्कोज्या ग \\
 &= २ वा कोज्या क
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{त्याचप्रमाणे, खल} &= २ वा कोज्या ख \\
 \text{गल} &= २ वा कोज्या ग
 \end{aligned}$$

११.६ त्रिकोणाच्या भुजांपासून च कोणवर्धुपासून (angular points) लंबकेंद्राची (orthocentre) अंतरे.

कमग त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंपासून समोरील बाजूपर फक्त, राय च गद् हे लंब काढा. या तीन रेषांचा छेदनबिंदु ल, त्रिकोणाचे लंबकेंद्र आहे.

तय, यद, दत जोडा. तयद हा कमग त्रिकोणाचा पदिक (pedal) त्रिकोण आहे.



अ. ११.५

कमग त्रिकोणांत,

$$\begin{aligned} \angle BLC &= 180^\circ - \angle A \\ &= 180^\circ - \angle A \end{aligned}$$

गळय त्रिकोणांत,

$$\angle GAC = 90^\circ - \angle A$$

लमग त्रिकोणांत,

$$\begin{aligned} \angle LAG &= 90^\circ - \angle A \\ \angle LAG &= 90^\circ - \angle A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{लत} &= \text{खत रप मखथ} \\
 &= \text{गा कोज्या ख रप } (90^\circ - \text{ग}) \\
 &= \text{गा कोज्या ख कोरप ग} \\
 \text{पण गा} &= २ प्रा ज्या ग
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{लत} &= २ प्रा कोज्या ख कोज्या ग \\
 \text{त्याचप्रमाणे, लथ} &= २ प्रा कोज्या ग कोज्या क \\
 \text{लद} &= २ प्रा कोज्या क कोज्या ख \\
 \text{पुन्हा, कखथ त्रिकोणांत,} \\
 \text{कथ} &= \text{कख कोज्या क} = \text{गा कोज्या क} \\
 \text{आणि फतग त्रिकोणांत,} \\
 \angle \text{गकत} &= 90^\circ - \text{ग} \\
 \Delta \text{फलथ मध्ये, } \frac{\text{फल}}{\text{कथ}} &= \frac{\text{व्युत्कोज्या थकल}}{\text{व्युत्कोज्या गकत}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{फल} &= \text{कथ व्युत्कोज्या गकत} \\
 &= \text{गा कोज्या क व्युत्कोज्या } (90^\circ - \text{ग}) \\
 &= \text{गा कोज्या क व्युज्या ग} \\
 &= २ प्रा ज्या ग. कोज्या क व्युज्या ग \\
 &= २ प्रा कोज्या क
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{त्याचप्रमाणे, खल} &= २ प्रा कोज्या ख \\
 \text{गल} &= २ प्रा कोज्या ग
 \end{aligned}$$

११.६१ पश्चिम त्रिकोणाच्या मुळा आणि कोन.
 आता $\angle लदख = ९०^\circ$, $\angle लतय = ९०^\circ$
 म्हणून दलतय हा चक्रिक त्रिकोण आहे.

$$\therefore \angle इतल = \angle दखल \\ = ९०^\circ - क$$

नमूच, लतगय हा चक्रिक त्रिकोण आहे.

$$\therefore \angle लतय = \angle लगय \\ = ९०^\circ - क$$

$$\therefore \angle इतय = \angle इतल + \angle लतय \\ = १८०^\circ - २ क$$

त्याचप्रमाणे, $\angle तयद = १८०^\circ - २ ख$

$$\angle यडत = १८०^\circ - २ ग$$

आता कसय त्रिकोणांत

$$कय = गा कोन्या क$$

व कडद त्रिकोणांत

$$कड = खा कोन्या क$$

म्हणून, कडय त्रिकोणांत,

$$यड = कड + कय = २कड. कय कोन्या क$$

$$= खा कोन्या क + गा कोन्या क$$

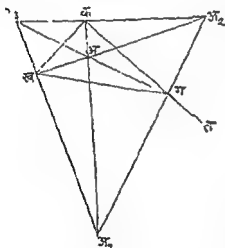
$$= २खा कोन्या क. गा कोन्या क. कोन्या क$$

$$= कोन्या क (खा + गा - २खा गा कोन्या क,$$

$$= का कोन्या क$$

थद = वा कोट्या क
 त्याचप्रमाणे दत = वा कोट्या ल
 तथ = वा कोट्या ग

११ ६२ समजा कलम त्रिकोणाचे अ हे अंत केंद्र असून
 क, ल, ग कोणासमोरील बाहेरकेंद्र अनुक्रमे α , β , γ ही
 आहेत अग आणि α , β हे वगळ कोणाचे अनुक्रमे



अंतर्दिभाजक (inter-
 nal bisector) आणि
 बाह्यदिभाजक (exter-
 nal bisector) आहेत.

म्हणून रैखिकीने,

$$\angle \alpha \beta \gamma = 90^\circ$$

$$\text{तसेच } \angle \beta \gamma \alpha = 90^\circ$$

म्हणून α , β , γ ही
 एक सरळ रेषा असून
 अग तिला लंब आहे.
 तसेच, α , β , γ ही
 या सरळ रेषा असून
 अग आणि अल त्यांना
 लंब आहेत.

आ ११ ६

शिवाय अक व अ, क या दोन्ही रेषा एकत्र हा अतः-
 कोण (internal angle) दुभागतात म्हणून क, अ, अ, हे
 बिंदू एकाच सरळ रेषेत आहेत त्याचप्रमाणे लअअ,

गय अ_३ या सरळ रेषा वाढत. म्हणून 'क' ए आणि ग हे बिंदू अ_३ अ_३ अ_३ या त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूपासून समोरील थार्ज्यर काढलेल्या लंबांचे पाद आहेत. हे लंब अ या बिंदूत मिळतात. म्हणून कसग त्रिकोण अ_३ अ_३ अ_३ या त्रिकोणाचा पदिक त्रिकोण, आणि अ बिंदू अ_३ अ_३ अ_३ या त्रिकोणाचे लंबकेंद्र आहे.

उदाहरण. अ_३ अ_३ अ_३ या त्रिकोणाच्या भुजा व कोण काढा कसग हा अ_३ अ_३ अ_३ या त्रिकोणाचा पदिक त्रिकोण आहे.

म्हणून ११.६१ या अनुच्छेदावरून,

$$\angle \text{कसग} = १८०^\circ - २ \angle \text{अ}_३ \text{अ}_३ \text{अ}_३,$$

$$\text{किंवा } \angle \text{क} = १८०^\circ - २ \angle \text{अ}_३,$$

$$\therefore \angle \text{अ}_३ = \frac{१८०^\circ - \text{क}}{२} = ९०^\circ - \frac{\text{क}}{२}$$

$$\text{त्याचप्रमाणे, } \angle \text{अ}_३ = ९०^\circ - \frac{\text{क}}{२}$$

$$\angle \text{अ}_३ = ९०^\circ - \frac{\text{क}}{२}$$

पुन्हा त्याच अनुच्छेदावरून

$$\text{सग} = \text{अ}_३ \text{अ}_३, \text{ कोज्या } \text{अ}_३ \text{अ}_३ \text{अ}_३,$$

$$\text{किंवा का} = \text{अ}_३ \text{अ}_३, \text{ कोज्या } \text{अ}_३,$$

$$\therefore \text{अ}_३ \text{अ}_३ = \text{का व्युत्कोज्या } \text{अ}_३,$$

$$= \text{का व्युत्कोज्या } \left(९०^\circ - \frac{\text{क}}{२} \right) = \text{का व्युत्कोज्या } \frac{\text{क}}{२}$$

त्याचप्रमाणे, $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$ ग

$\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$ ख

अन्यथा—

११-४१ या अनुच्छेदाच्या शेवटी दिलेल्या टीपेनुसार,

$$\angle \alpha_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{पण } \angle \alpha_1 = \angle \alpha_2$$

$$\therefore \angle \alpha_2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{तसेच, } \angle \alpha_1 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle \alpha_2 = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

शिवाय, जर दिलेल्या आकृतीत, $\triangle \alpha_1, \alpha_2$ मध्ये,

$$\alpha_1, \alpha_2 = \alpha, \text{ क व्युत्क्रिया } \alpha,$$

$$= \alpha, \text{ क व्युत्क्रिया } \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \alpha, \text{ क व्युत्क्रिया } \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{पण, } \alpha, \text{ क} = \alpha, \text{ व्युत्क्रिया } \frac{\alpha}{2}$$

(११-३१ अनुच्छेदांतील टीप पहा)

$$\therefore \alpha, \alpha_1 = \alpha, \text{ व्युत्क्रिया } \frac{\alpha}{2} \text{ व्युत्क्रिया } \frac{\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{सा} \cdot \frac{\text{क}}{2} \cdot \frac{\text{क}}{2} \cdot \frac{\text{ख}}{2} \cdot \frac{\text{ख}}{2} \\
&= \frac{\text{सा}}{\frac{\text{कोज्या}}{2} \cdot \frac{\text{कोज्या}}{2}} \\
&= \text{सा} \sqrt{\frac{\text{खा} \cdot \text{गा} \cdot \text{गा} \cdot \text{का}}{\text{सा} (\text{सा} - \text{का}) \cdot \text{सा} (\text{सा} - \text{खा})}} \\
&= \text{गा} \sqrt{\frac{\text{का} \cdot \text{खा}}{(\text{सा} - \text{का}) (\text{सा} - \text{खा})}} \\
&= \text{गा} \cdot \frac{\text{ग}}{2} \cdot \frac{\text{ग}}{2}
\end{aligned}$$

अशाच रीतीने अ, ब, ग, घ, काढतां येतात.

११.७ मध्यकांच्या (medians) लांबी.



आ. ११७

कसम त्रिकोणांत वच ही मग त्या दुभागणारी रेषा आहे.

$$\therefore \text{खच} = \text{गच} = \frac{\text{का}}{2}$$

कलत्र त्रिकोणांत,

$$\text{कच}^2 = \text{कल}^2 + \text{लच}^2 - 2\text{कल} \cdot \text{खच} \cos \angle \text{कलख}$$

$$= \text{गा}^2 + \frac{\text{का}^2}{4} - 2\text{गा} \cdot \frac{\text{का}}{2} \cos \angle \text{गाका}$$

$$\therefore 2\text{कच}^2 = 2\text{गा}^2 + \frac{\text{का}^2}{2} - \text{गाका} \cos \angle \text{गाका}$$

$$= 2\text{गा}^2 + \frac{\text{का}^2}{2} - (\text{का}^2 + \text{गा}^2 - \text{ला}^2)$$

$$= \text{गा}^2 + \text{ला}^2 - \frac{\text{का}^2}{2}$$

$$\therefore \text{कच} = \frac{1}{2} \sqrt{2\text{गा}^2 + 2\text{ला}^2 - \text{का}^2}$$

त्याचप्रमाणे अनुक्रमे गच, कल यांना दुभागणाऱ्या खल, गज या मध्यकांच्या लांबी पुढील समीकारांवरून मिळतात.

$$\text{खल} = \frac{1}{2} \sqrt{2\text{का}^2 + 2\text{गा}^2 - \text{ला}^2}$$

$$\text{गज} = \frac{1}{2} \sqrt{2\text{ला}^2 + 2\text{का}^2 - \text{गा}^2}$$

११-७१ मध्यकांच्या भुजांशीं नती (inclinations).

समजा \angle कचख = अ

कचख त्रिकोणांत,

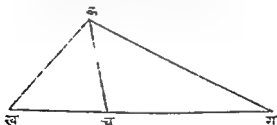
$$\frac{\text{कच}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या अ}}$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{कच}}$$

$$= \frac{२ \text{ गा ज्या ख}}{\sqrt{२ \text{ गा}^२ + २ \text{ खा}^२ - \text{का}^२}}$$

$$= \frac{४ \Delta}{\text{का} \sqrt{२ \text{ गा}^२ + २ \text{ खा}^२ - \text{का}^२}}$$

११-८ त्रिकोणाच्या कोनांचे द्विमात्रक.



आ. ११-८

समजा कच रेखा क कोनाला दुभागून खाग ला च बिंदू मिळते.

आता, Δ कखच + Δ कचग = Δ कखग

$$\therefore \frac{1}{2} \text{ कख. कच ज्या } \frac{क}{2} + \frac{1}{2} \text{ कग. कच ज्या } \frac{क}{2} \\ = \frac{1}{2} \text{ कख. कग ज्याक}$$

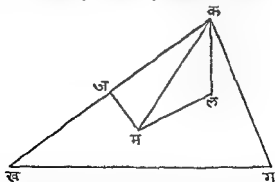
$$\text{किंवा } \frac{1}{2} \text{ कच ज्या } \frac{क}{2} (\text{गा} + \text{खा}) = \frac{1}{2} \text{ गा खा ज्या क}$$

$$\text{किंवा कच } (\text{गा} + \text{खा}) = 2 \text{ खा गा को ज्या } \frac{क}{2}$$

$$\therefore \text{ कच} = \frac{2 \text{ खा गा को ज्या } \frac{क}{2}}{\text{गा} + \text{खा}}$$

$$\text{शिकाय, } \angle \text{कचग} = \angle \text{चखक} + \angle \text{खकच} = \text{ख} + \frac{क}{2}$$

११.९ लंबकेन्द्र च परिकेंद्र यांमधील सन्तर.



आ. ११.९

कखग त्रिकोणाचें ल हें लंबकेन्द्र आणि म हें परिकेंद्र आहे. कख ला म पासून मज हा लंब काढा.

आता, $\angle जमक = ग$

$\therefore \angle मकख = ९०^\circ - ग$

आणि $\angle लकख = ९०^\circ - ख$

$\therefore \angle मकल = \angle लकख - \angle मकख$

$$= (९०^\circ - ख) - (९०^\circ - ग) = ग - ख$$

शिवाय, कल = २ग्रा कोज्या क (अनुच्छेद ११६ वरून)

व कम = ग्रा

म्हणून, कमल त्रिकोणांत,

मल^२ = कम^२ + कल^२ - २कम कल कोज्या मकल

$$= ग्रा^२ + ४ग्रा^२ कोज्या^२ क$$

$$- ४ग्रा^२ कोज्या क कोज्या (ग - ख)$$

$$= ग्रा^२ [१ + ४ कोज्या क \{ कोज्या क - कोज्या (ग - ख) \}]$$

$$= ग्रा^२ [१ - ४ कोज्या क \{ कोज्या (ख + ग) + कोज्या (ग - ख) \}]$$

$$= ग्रा^२ [१ - ८ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग]$$

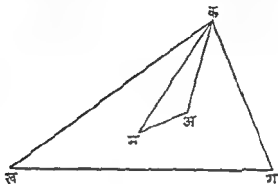
$$मल = ग्रा \sqrt{१ - ८ कोज्या क कोज्या ख कोज्या ग}$$

उपसाध्य :— कखग जर लंबविकोण असेल तर

मल = अ।

११.२१ अंतःकेंद्र व परिकेंद्र यांमधील अंतर.

कखग त्रिकोणाचें अ हें अंतःकेंद्र व म हें परिकेंद्र आहे.



आ ११११

$$\therefore \angle गकअ = \frac{\text{फ}}{२}, \angle गकम = ९०^\circ - \text{ख}$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle अकम &= \angle गकम - \angle गकअ \\ &= ९०^\circ - \text{ख} - \frac{\text{फ}}{२} = \frac{\text{ग} - \text{ख}}{२} \end{aligned}$$

कम = अ।

आणि कम = अ व्युत्पत्त्या $\frac{\text{फ}}{२}$,

(११.३ अनुच्छेदाच्या दीपेनुसार)

$$= \left(\text{धरा ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \right) \text{ज्युज्या} \frac{\text{क}}{2}$$

$$= \text{धरा ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2}$$

अक्रम त्रिकोणांत,

$$\text{मअ}^2 = \text{कम}^2 + \text{कअ}^2 - 2\text{कम} \cdot \text{कअ} \cos \text{ज्या अक्रम}$$

$$= \text{त्रा}^2 + 16\text{त्रा}^2 \text{ज्या}^2 \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या}^2 \frac{\text{ग}}{2}$$

$$- 8\text{त्रा}^2 \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \cos \text{ज्या} \left(\frac{\text{ग} - \text{ख}}{2} \right)$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[1 + 8 \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \left\{ 2 \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \text{ज्या} \left(\frac{\text{ग} - \text{ख}}{2} \right) \right\} \right]$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[1 + 8 \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \left(\text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \cos \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \right) \right]$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[1 - 8 \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \cos \text{ज्या} \left(\frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} \right) \right]$$

$$= \text{त्रा}^2 \left[1 - 8 \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{क}}{2} \right]$$

$$\therefore \text{मअ} = \text{त्रा} \sqrt{1 - 8 \text{ज्या} \frac{\text{क}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ख}}{2} \text{ज्या} \frac{\text{ग}}{2}}$$

है फल पुढील रूपांतहि लिहितां येतें.

$$मअ^2 = मा^2 - २मा.भजा ज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२}$$

$$= मा^2 - २मा भ$$

इयाचप्रमाणे

$$मअ_१ = मा \sqrt{१ + ८ ज्या \frac{क}{२} कोज्या \frac{ख}{२} कोज्या \frac{ग}{२}}$$

$$= \sqrt{मा^2 + २मा भ_१}$$

हे सुद्धा दाखवितां येत.

उदाहरणसंग्रह १६

(१) एका त्रिकोणाच्या भुजा ३, ४ व ५ पाद लांब आहेत.
तर मा, भ, भ_१, भ_२ व भ_३ काढा.

(२) कवग या कोणत्याही त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

$$\frac{१}{२} मा^२ ज्या \frac{क}{२} ज्या \frac{ख}{२} ज्या \frac{ग}{२} \text{ आहे हे सिद्ध करा}$$

सिद्ध करा की कोणत्याही त्रिकोणांत,

$$(३) का कोरप क + खा कोरप ख + गा कोरप ग = २ (मा + भ)$$

$$(४) भ_१ + भ_२ + भ_३ - भ = ४ मा \quad [\text{अध्या १९४२}]$$

$$(५) \left(\frac{१}{भ_१} + \frac{१}{भ_२}\right) \left(\frac{१}{भ_२} + \frac{१}{भ_३}\right) \left(\frac{१}{भ_३} + \frac{१}{भ_१}\right) = \frac{६४ मा^३}{का^२ खा^२ गा^२}$$

[नागपूर १९२५]

$$(६) \frac{1}{a} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$$

$$(७) a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 = 3a^2$$

[मुंबई १९२७]

$$(८) (a_2 - a_3) \cos A + (a_3 - a_1) \cos B + (a_1 - a_2) \cos C = 0$$

[भांभ १९३५]

$$(९) a a_1 a_2 a_3 = \Delta^2$$

[घनारस १९४३]

$$(१०) \Delta = \frac{1}{2} a a_1 \cos A = \frac{1}{2} a_2 a_1 \cos B = \frac{1}{2} a_3 a_1 \cos C$$

$$(११) (a_2 + a_3) \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_3}} = 2a$$

[यनारस १९४२]

$$(१२) \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \frac{1}{2a_3}$$

[अलाहाबाद १९४२]

(१३) कलम हा लंबकोणत्रिकोण असेल तर

$$\left(1 - \frac{a_1}{a}\right) \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) = 2$$

है दाखवा.

[नागपूर १९४१]

(१४) कलम हा लंबकोणत्रिकोण असेल तर

$$a_1 = a_2 + a_3 + a$$

है दाखवा.

[नागपूर १९४३]

(१५) कखग त्रिकोणाच्या क, ख, ग या शिरोबिंदूपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांच्या लांबी अनुक्रमे ल_१, ल_२, ल_३ आहेत. तर सिद्ध करा की

$$(१) \frac{१}{ल_१} + \frac{१}{ल_२} + \frac{१}{ल_३} = \frac{१}{त्र} \quad [\text{नागपूर १९४६}]$$

(२) ल_१ ही त्र_१ व त्र_२ यांचे हरात्मक समांतर मध्यक (harmonic mean) आहे.
[नागपूर १९४६]

$$(३) \angle त्र_३ = \frac{का^२ खा^२ गा^२}{ल_१ ल_२ ल_३} \quad [\text{मलाहाबाद १९३९}]$$

(१६) कखग त्रिकोणाच्या कोणबिंदूपासून समोरील बाजूंवर काढलेले लंब म बिंदूत मिळतात. मक = य, मख = र, मग = ल असाव्यात

$$\frac{का}{य} + \frac{खा}{र} + \frac{गा}{ल} = \frac{का खा गा}{य र ल} \quad \text{है दाखवा.}$$

[धनारस १९४४]

(१७) कखग त्रिकोणाच्या क, ख, ग या कोणबिंदूपासून समोरील बाजूंवर काढलेल्या लंबांचे पाद च, छ, ज आहेत. तर कछज, खचज, गचछ या त्रिकोणांना परिलिखित करणाऱ्या घृतांचे व्यास अनुक्रमे का कोस्पक, खा कोस्पख, गा कोस्पग आहेत है सिद्ध करा.
[धनारस १९३०]

- (१८) कागग त्रिकोणाच्या पदिक त्रिकोणाचें परिमाण
४ चा ज्या कोज्या ख ज्या ग आहे हें दाखवा.

[नागपूर १९४१]

- (१९) एका त्रिकोणाच्या परिवर्तनासून समोरील याजुंवर
काढलेले लंब ल, ल', ल" आहेत. तर

$$\frac{\text{का}}{\text{ल}} + \frac{\text{खा}}{\text{ल}'} + \frac{\text{गा}}{\text{ल}''} = \frac{१}{४} \cdot \frac{\text{का} \text{खा} \text{गा}}{\text{ल} \text{ल}' \text{ल}''} \text{ हें सिद्ध करा.}$$

[बनारस १९३५]

- (२०) कागग या कोणत्याही त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{अंतर्गुंताचें क्षेत्रफल}}{\text{त्रिकोणाचें क्षेत्रफल}} = \frac{\text{या}}{\text{कोस्प} \frac{\text{क}}{२} \text{कोस्प} \frac{\text{ख}}{२} \text{कोस्प} \frac{\text{ग}}{२}}$$

हें सिद्ध करा. [कलकत्ता बी. एस्सी १९३१]

- (२१) अ_१, अ_२, अ_३ ही कागग त्रिकोणाचीं वहिर्केद्रें अस-
ल्यास, सिद्ध करा की,

$$(१) \text{अ}_१ \text{अ}_२ = \text{का व्युज्या} \frac{\text{क}}{२} = ४ \text{चा कोज्या} \frac{\text{क}}{२}$$

(२) अ_१, अ_२, अ_३ या त्रिकोणाचें क्षेत्रफल

$$= ८ \text{चा}^२ \text{कोज्या} \frac{\text{क}}{२} \text{कोज्या} \frac{\text{ख}}{२} \text{कोज्या} \frac{\text{ग}}{२}$$

$$= \frac{\text{का} \text{खा} \text{गा}}{२ \text{चा}}$$

[नागपूर १९४०, १९४३]

$$(३) अ_१ अ_२, अ_२ अ_१, अ_१ अ_२ = \frac{१६ प्रा^२ \Delta}{त्र}$$

(२२) अ, अ_१, अ_२ च अ_३ ही वखग त्रिकोणाचें अंतर्वृत्त आणि तीन बहिर्वृत्त यांची केंद्रे आहेत तर सिद्ध करा की,

$$(१) अ अ_१ = वायुत्कोज्या \frac{क}{२} = ४ प्रा ज्या \frac{क}{२}$$

[नागपूर १९३१]

$$(२) अ अ_१, अ अ_२, अ अ_३ = १६ प्रा^२$$

[मद्रास १९४२]

$$(३) अ, क, अ, र, अ, ग$$

$$= ६४ प्रा^२ कोज्या^२ \frac{क}{२} कोज्या^२ \frac{ख}{२} कोज्या^२ \frac{ग}{२}$$

$$(४) अक अख अग = ४ प्रा^२$$

$$(५) \frac{अक}{अ, क} + \frac{अख}{अ, ख} + \frac{अग}{अ, ग} = १$$

(२३) वखग त्रिकोणातील खग या बाजूंत च, छ हे बिंदू असे घेतले की

$$रच = चछ = छग$$

$$\angle खकच = य, \angle चकछ = र, \angle छग = ल असल्यास$$

$$\frac{ज्या (य + र) ज्या (र + ल)}{ज्या य ज्या ल} = ४$$

हें सिद्ध करा.

[नागपूर १९४५]

- (२४) कावग त्रिकोणांतील ग कोणाचा द्विभाजक कस ला
घ विंदूत घ परिवृत्ताला छ विंदूत छेदतो; तर

$$\frac{गछ}{घछ} = \frac{(पा + खा)^2}{गा^2}$$

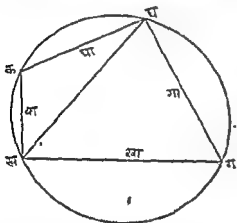
हें दाखवा.

[नागपूर १९४३]

प्रकरण चारोंवे

वृत्तीय चौकोण. नियमित बहुभुज

१२.१ वृत्तीय चौकोणाचें क्षेत्रफळ.



कखगघ हा क्ष
क्षेत्रफळ असणारा
एक वृत्तीय
चौकोण असून
त्याच्या कख, खग,
गघ, घक, या

आ. १२.१

याजू अनुक्रमें का, खा, गा, घा लांबीच्या आहेत.

म्हणजे, चौकोण कखगघ = Δ कखघ + Δ खगघ

$$\therefore \text{क्ष} = \frac{1}{2} \text{का घा ज्या क} + \frac{1}{2} \text{खा गा ज्या ग}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{का घा} + \text{खा गा}) \text{ज्या क}$$

($\because \text{ग} = \text{ज्या} - \text{क}$)

$$\therefore \text{ज्या क} = \frac{2 \text{क्ष}}{(\text{का घा} + \text{खा गा})} \dots \dots \dots (1)$$

पुन्हा, फलघ त्रिकोणांत

$$\text{खघ}^2 = \text{का}^2 + \text{घा}^2 - 2 \text{का घा कोज्या क}$$

एगघ त्रिकोणांत

$$\text{खब}^2 = \text{खा}^2 + \text{गा}^2 - 2 \text{खा गा कोज्या ग}$$

$$= \text{खा}^2 + \text{गा}^2 + 2 \text{खा गा कोज्या क}$$

खघ^२ वया वा दोन अर्हा समान मांडून

$$\text{का}^2 + \text{घा}^2 - 2 \text{का घा कोज्या क}$$

$$= \text{खा}^2 + \text{गा}^2 + 2 \text{खा गा कोज्या क}$$

$$\text{किंवा कोज्या क} = \frac{\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2}{2 (\text{का घा} + \text{खा गा})} \dots (2)$$

(1) व (2) यांचा वर्ग योग (squaring and adding)

करून,

$$1 = \frac{4 \text{क्ष}^2}{(\text{का घा} + \text{खा गा})^2} + \frac{(\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2)^2}{4 (\text{का घा} + \text{खा गा})^2}$$

किंवा $4 (\text{का घा} + \text{खा गा})^2$

$$= 4 \text{क्ष}^2 + (\text{का}^2 + \text{घा}^2 - \text{खा}^2 - \text{गा}^2)^2$$

किंवा १६ क्ष^२

$$\begin{aligned}
 &= ४(का घा + खा गा)^२ - (का^२ + घा^२ - खा^२ - गा^२)^२ \\
 &= \left\{ २ (का घा + खा गा) + (का^२ + घा^२ - खा^२ - गा^२) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ २ (का घा + खा गा) - (का^२ + घा^२ - खा^२ - गा^२) \right\} \\
 &= \left\{ (का + घा)^२ - (खा - गा)^२ \right\} \times \\
 &\quad \left\{ (खा + गा)^२ - (का - घा)^२ \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (का + घा + खा - गा) (का + घा - खा + गा) \times \\
 &\quad (खा + गा + का - घा) (खा + गा - का + घा)
 \end{aligned}$$

आता, का + खा + गा + घा = २ सा घेऊन,

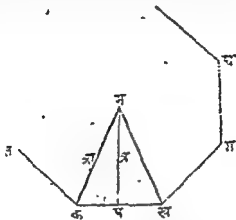
$$\begin{aligned}
 १६ क्ष^२ &= (२सा - २गा) (२सा - २खा) \times \\
 &\quad (२सा - २घा) (२सा - २का)
 \end{aligned}$$

$$\therefore क्ष^२ = (सा - का) (सा - खा) (सा - गा) (सा - घा)$$

$$\text{किंवा, } क्ष = \sqrt{(सा - का) (सा - खा) (सा - गा) (सा - घा)}$$

१२.२ नियमित बहुभुजः—उषा बहुभुजाच्या सर्व बाजू समान व सर्व कोण समान असतात त्या बहुभुजाला नियमित बहुभुज म्हणतात.

आता आपण नियमित षट्भुजाचे कोण, व त्याच्या प्रत्येक बाजूने त्याच्या केंद्राशी केलेले कोण काढू.



आ. १२-२

फलगत्य त हा एक स भुजा असलेला नियमित षट्भुज आहे. क आणि स या कोणांचे द्विभाजक म बिंदूत मिळतात. म बिंदु सर्व कोणबिंदूंना जोडल्याम आपणांस कमण समान स त्रिकोण मिळतील आणि सर्व बाजूंनी म पार्शी आपातित केलेले कोण समान होतील.

$$\therefore \angle \text{कमल} = \frac{2}{स} \times (\text{चार लंबकोण})$$

$$= \frac{२ \text{ प्या}}{स}$$

कमल त्रिकोणांतील कल या पायापासचे कोण समान आहेत.

$$\therefore \angle \text{मकख} = \frac{\text{प्या} - \angle \text{कमख}}{२} = \frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$\begin{aligned} \text{म्हणून, बहुभुजाचा प्रत्येक कोण} &= २\angle \text{मकख} \\ &= \frac{(स-२)\text{प्या}}{\text{स}} \end{aligned}$$

१२.३ नियमित बहुभुजाच्या अंतर्लिखित व परिलिखित घृत्तांच्या त्रिज्या.

आकृति १२.२ मध्ये, फळगघ त हा म हे केंद्र असलेला आणि स वाजू असलेला एक नियमित बहुभुज असून त्याच्या प्रत्येक वाजूची लांबी स आहे. मक, मख जोडून कख ला म पासून मप खंय काढला आहे. नियमित बहुभुजाच्या अंतर्लिखित व परिलिखित घृत्तांच्या त्रिज्या अनुक्रमे मप आणि मरू या आहेत. मप आणि मरू अनुक्रमे ञ आणि घा ने दर्शविल्या आहेत.

आता, मकख त्रिकोणांत,

$$\text{मप} = \text{कप रू मकप}$$

$$= \text{कप रू मकख}$$

पण, वरील अनुच्छेदाने,

$$\angle \text{मकख} = \frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}}$$

$$\therefore \text{म} = \frac{\text{य}}{२} \text{रूप} \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \right)$$

$$= \frac{\text{य}}{२} \text{कोरूप} \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{पुनः, } \frac{\text{कप}}{\text{मक}} = \text{कोज्या मकप}$$

$$\text{किंवा मक} = \text{कप व्युत्कोज्या मकप}$$

$$= \text{कप व्युत्कोज्या मकख}$$

$$\therefore \text{घा} = \frac{य}{२} \text{ व्युत्कोज्या } \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \right)$$

$$\text{किंवा घा} = \frac{य}{२} \text{ व्युज्या } \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \dots\dots\dots (२)$$

१२४. नियमित बहुभुजाचें क्षेत्रफल.

$$\text{नियमित बहुभुजाचें क्षेत्रफल} = \text{स} \times (\Delta \text{ मकख चें क्षेत्रफल})$$

$$= \text{स} \cdot \text{कप} \cdot \text{मप}$$

$$= \text{स कप} \cdot \text{कप स्प मकप}$$

$$= \text{स कप}^२ \text{ स्प मकख}$$

$$= \text{स} \left(\frac{य}{२} \right)^२ \text{ स्प } \left(\frac{\text{प्या}}{२} - \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \right)$$

$$= \text{स} \frac{य^२}{४} \text{ कोस्प } \frac{\text{प्या}}{\text{स}} \dots\dots (३)$$

हे क्षेत्रफल अंतर्लिखित किंवा परिलिखित घुत्ताच्या त्रिज्येच्या रूपांत पुढे दिव्याप्रमाणे व्यक्त करता येते.

$$\begin{aligned}
 \text{इष्ट क्षेत्रफल} &= \frac{\text{स य}^2 \cdot \text{कोरप व्या}}{\text{४ स}} \\
 &= \frac{\text{स}}{\text{४}} \times \left(\frac{\text{४ य}^2}{\text{कोरप}^2 \frac{\text{व्या}}{\text{स}}} \right) \text{कोरप} \frac{\text{व्या}}{\text{स}} \\
 &\quad [\text{अनुच्छेद १२.३ मधील (१) करून}] \\
 &= \text{स य}^2 \text{ कोरप} \frac{\text{व्या}}{\text{स}} \dots\dots\dots (\text{आ})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{पुन्दा इष्ट क्षेत्रफल} &= \frac{\text{स य}^2 \cdot \text{कोरप व्या}}{\text{४ स}} \\
 &= \frac{\text{स}}{\text{४}} \left(\frac{\text{४ य}^2}{\text{व्युज्या}^2 \frac{\text{व्या}}{\text{स}}} \right) \text{कोरप} \frac{\text{व्या}}{\text{स}} \\
 &\quad [\text{अनु० १२.३ मधील (२) करून}] \\
 &= \text{स य}^2 \cdot \text{कोरप} \frac{\text{व्या}}{\text{स}} \frac{\text{व्या}}{\text{स}} \\
 &= \frac{\text{स}}{२} \text{य}^2 \frac{\text{कोरप}^2 \text{व्या}^2}{\text{स}} \dots\dots\dots (\text{इ})
 \end{aligned}$$

१२.५ घृत्तार्चे क्षेत्रफल:

नियमित बहुभुजाच्या याज्जूची संख्या अनियतपणे वाढविल्यास बहुभुजाचें परिमाण सीमांती त्याच्या परिलिखित घृत्ताच्या परिघासमान होतें. म्हणून जेव्हां बहुभुजाच्या याज्जूची

संख्या अनंत होते तेव्हा त्याच क्षेत्रफळ त्याच्या परिलिखित वृत्ताच्या क्षेत्रफळासमान होते.

आता स याजू असणाऱ्या व या ही परिलिखित वृत्ताची त्रिज्या असलेल्या बहुभुजाचें क्षेत्रफळ $\frac{s}{2} \text{त्रा}^2 \text{ज्या} \frac{2\text{प्या}}{s}$ आहे.

\therefore त्रा त्रिज्या असलेल्या वृत्ताचें क्षेत्रफळ

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{s}{2} \text{त्रा}^2 \text{ज्या} \frac{2\text{प्या}}{s} \right\}$$

$$= \text{त्रा}^2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \text{ज्या} \frac{s}{2\text{प्या}} \text{ज्या} \frac{2\text{प्या}}{s} \right\}$$

$$= \text{प्या त्रा}^2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\text{ज्या} \left(\frac{2\text{प्या}}{s} \right)}{\left(\frac{2\text{प्या}}{s} \right)} \right\}$$

$$= \text{प्या त्रा}^2 \lim_{\left(\frac{2\text{प्या}}{s} \right) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\text{ज्या} \left(\frac{2\text{प्या}}{s} \right)}{\left(\frac{2\text{प्या}}{s} \right)} \right\}$$

$$= \text{प्या त्रा}^2 \quad (\text{अनु० ३.११ चरून})$$

म्हणून, वृत्ताचें क्षेत्रफळ = प्या \times (त्रिज्येचा वर्ग)

१२.६ उदाहरण. $\sqrt{3}$ पाद त्रिज्या असलेल्या घृत्तास
परिलिखित करणाऱ्या नियमित षड्भुजाचे (hexagon)
परिमाण व क्षेत्रफळ काढा.

दिलेल्या षड्भुजाची बाजू य आहे असे समजा.

आता $\text{त्र} = \frac{y}{2} \text{ कोस } \frac{\pi}{6}$ या संबंधावरून

$$\sqrt{3} = \frac{y}{2} \text{ कोस } \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{y}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$\therefore y = 2$ पाद

\therefore षड्भुजाचे परिमाण $= (2 \times 6)$ पाद $= 12$ पाद
शिवाय, षड्भुजाचे क्षेत्रफळ

$$= \frac{6 y^2}{4} \text{ कोस } \frac{\pi}{6}$$

[१२.४ अनुच्छेदांतील (अ) वरून]

$$= 6 \cdot \frac{4}{4} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} \text{ वर्ग पाद}$$

उदाहरणसंग्रह १७

- (१) स बाजू असलेल्या एका नियमित षड्भुजाच्या अंत-
लिखित व परिलिखित घृत्तांच्या त्रिज्या अनुक्रमेण त्र
आणि त्रा आहेत व त्या षड्भुजाची बाजू y आहे.

$$\text{तर } \frac{\text{प्रा}}{\text{प्र}} = \frac{१}{\text{कोज्या प्या}} \text{ व प्रा} + \text{प्र} = \frac{\text{य}}{२} \text{ कोस्य } \frac{\text{प्या}}{२\text{स}}$$

हैं सिद्ध करा.

- (२) ४ पाद त्रिज्येच्या वृत्तांत अंतर्लिखित केलेल्या नियमित षड्भुजाचें परिमाण व क्षेत्रफळ काढा.
- (३) एका समायताचें (square) परिमाण एका नियमित अष्टभुजाच्या (octagon) परिमाणाइतकें आहे. तर त्यांची क्षेत्रफळे $२ : \sqrt{२} + १$ या प्रमाणांत आहेत हैं सिद्ध करा.
- (४) कोणत्याहि वृत्तास परिलिखित करणाऱ्या व त्याला अंतर्लिखित होणाऱ्या नियमित अष्टभुजांच्या क्षेत्रफळांची निष्पत्ति $२\sqrt{२} (\sqrt{२} - १)$ समान आहे हैं सिद्ध करा. [नागपूर १९३२]
- (५) एका नियमित षड्भुजाने परिलिखित असलेल्या वृत्तांत एक समभुजत्रिकोण अंतर्लिखित केला. तर परिलिखित षड्भुज, दिलेलें वृत्त व अंतर्लिखित त्रिकोणांची परिमाणें $४ : \frac{२\text{प्या}}{\sqrt{३}} : ३$ या प्रमाणांत असून त्यांची क्षेत्रफळे $८ : \frac{४\text{प्या}}{\sqrt{३}} : ३$ या प्रमाणांत आहेत हैं सिद्ध करा.

(६) एका घृत्तांत अंतर्लिखित केलेल्या नियमित पंचभुज, पद्भुज व दशभुज (decagon) यांच्या बाजूंच्या लांबी अनुक्रमे त, थ आणि द आहेत. तर सिद्ध करा की,

$$त^2 = थ^2 + द^2$$
 [मैसूर १९४३]

(७) भुजांची संख्या समान असलेले दोन नियमित बहुभुज एका घृत्तास अंतर्लिखित व परिलिखित करतात. तर सिद्ध करा की

(परिलिखित बहुभुजाचें क्षेत्रफल)
 (परिलिखित बहुभुजाची परित्रिज्या)

= (अंतर्लिखित बहुभुजाचें सामिपरिमाण)
 [मद्रास १९४१]

प्रकरण तेरावें

छेदा

१३.१ परिभाषा:— क ही कोणतीही संख्या असून y आणि t अशा दोन संख्या आहेत की $k^y = t$; यला k आधारावरील t ची छेदा (logarithm) म्हणतात. t छेकत असं छिह्तितात. (छेकत ला छेदा त आधार क असं वाचतात.)

म्हणून कोणत्याही संख्येची दिलेल्या आधारावरील छेदा, ती संख्या मिळण्यासाठी आधाराचें ज्या घातांकावर (index of the power) उच्चायन करावें लागतें, त्या घातांका-समान असते.

$$\begin{array}{ll} \text{उदाहरणार्थ, } 4^3 = 64 & \therefore 3 = \text{छे. } 64 \\ 10^3 = 1000 & \therefore 3 = \text{छे. } 1000 \\ 2 \cdot 1^{-1} = 0.5 & \therefore -1 = \text{छे. } 0.5 \end{array}$$

एकाच संख्येच्या निरनिराळ्या आधारांवरील छेदा निरनिराळ्या असतात हें लक्षांत ठेवायें.

उदाहरणार्थ, $३^४ = ८१$ व $२^४ = ८१$

$\therefore \log_3 ८१ = ४$ व $\log_2 ८१ = २$

१३.२ कांही विशिष्ट छेदा.

(१) क कोणतीहि परिमित राशि असल्यास $k^0 = १$ हा समीकार नेहमी सत्य असतो.

$$\therefore \log_k १ = ०.$$

म्हणजे कोणत्याहि आधारावरील १ ची छेदा शून्य असते.

(२) पुन्हा क ही कोणतीहि राशि असल्यास,

$$k^k = k$$

$$\therefore \log_k k = १$$

म्हणजे कोणत्याहि संख्येची छेदा, तीच संख्या आधार असल्यास, १ समान असते.

(३) जर $k > १$, तर $k^\infty = \infty$

$$\therefore \log_k \infty = \infty, \quad k > १$$

(४) जर $k > १$, तर $k^{-\infty} = ०$

$$\therefore \log_k ० = -\infty, \quad k > १$$

१३.३ छेदांचे मूलभूत नियम.

क, य, र कोणत्याहि तीन राशी असल्यास त्यांमधे खालील घातांक-नियम (laws of indices) सत्य असतात हें आपणांस वैजिकीवरून (algebra) माहीत आहे.

$$(१) \quad क^य \times क^र = क^{य+र}$$

$$(२) \quad \frac{क^य}{क^र} = क^{य-र}$$

$$(३) \quad (क^य)^र = क^{य \times र}$$

यांच्यासारखेच तीन मूलभूत छेदा-नियम खाली दिले आहेत.

क, म, न या कोणत्याहि तीन वास्तविक (real) राशी असल्यास

$$(१) \quad छेक(मन) = छेकम + छेकन$$

$$(२) \quad छेक\left(\frac{म}{न}\right) = छेकम - छेकन$$

$$(३) \quad छेक(म^n) = न छेकम$$

१३.३१ (१) $छेक(मन) = छेकम + छेकन$ हें सिद्ध करणें.

समजा $छेकम = य$ व $छेकन = र$.

$$\therefore m = k^y \text{ व } n = k^r$$

(परिभाषेवरून)

$$\therefore mn = k^y \cdot k^r \\ = k^{y+r}$$

म्हणून, परिभाषेनुसार

$$\therefore \text{छेक (मन)} = y + r \\ = \text{छेकम} + \text{छेकन}$$

म्हणजे दोन राशींच्या गुणनफलाची दिलेल्या आधारा-
वरील छेदा, त्या राशींच्या त्याच आधारावरील छेदांच्या
योगासमान असते.

उपसाध्यः— छेक(त. थ. द...) = छेकत + छेकथ + छेकद + ...

$$१३.३२ \quad (२) \text{ छेक } \left(\frac{m}{n} \right) = \text{छेकम} - \text{छेकन} \text{ सिद्ध करणे.}$$

समजा छेकम = y आणि छेकन = r

म्हणून, परिभाषेवरून,

$$m = k^y, \quad n = k^r$$

$$\text{आता} \quad \frac{m}{n} = \frac{k^y}{k^r} \\ = k^{y-r}$$

$$\therefore \text{छेक } \left(\frac{m}{n} \right) = y - r \\ = \text{छेकम} - \text{छेकन}$$

१३३ छेदांचे मूलभूत नियम.

क, य, र कोणत्याहि तीन राशी असल्यास त्यांमधे ग्यालील घातांक-नियम (laws of indices) सत्य असतात हें आपणांस येजिकीयरून (algebra) माहीत आहे.

$$(१) \quad क^य \times क^र = क^{य+र}$$

$$(२) \quad \frac{क^य}{क^र} = क^{य-र}$$

$$(३) \quad (क^य)^र = क^{य \times र}$$

यांच्यासारकेच तीन मूलभूत छेदा नियम खाली दिले आहेत.

क, म, न या कोणत्याहि तीन वास्तविक (real) राशी असल्यास

$$(१) \quad छेक(मन) = छेकम + छेकन$$

$$(२) \quad छेक\left(\frac{म}{न}\right) = छेकम - छेकन$$

$$(३) \quad छेक(म^n) = न छेकम$$

$$१३.३१ \quad (१) \quad छेक(मन) = छेकम + छेकन$$

$$\text{समजा } छेकम = य \text{ व } छेकन = र$$

$$\therefore m = k^y \text{ व } n = k^r$$

(परिभाषेवरून)

$$\therefore mn = k^y \cdot k^r \\ = k^{y+r}$$

म्हणून, परिभाषेनुसार

$$\text{छेक (मन)} = y + r \\ = \text{छेकम} + \text{छेकन}$$

म्हणजे दोन राशींच्या गुणनफळाची दिलेल्या आधारावरील छेदा, त्या राशींच्या त्याच आधारावरील छेदांच्या योगासमान असते.

उपसाध्यः— छेक(त. थ. द...) = छेकत + छेकथ + छेकद + ...

$$१३.३२ \quad (२) \text{ छेक } \left(\frac{m}{n} \right) = \text{छेकम} - \text{छेकन} \text{ सिद्ध करणे.}$$

समजा छेकम = y आणि छेकन = r

म्हणून, परिभाषेवरून,

$$m = k^y, \quad n = k^r$$

$$\text{आता } \frac{m}{n} = \frac{k^y}{k^r} \\ = k^{y-r}$$

$$\therefore \text{छेक } \left(\frac{m}{n} \right) = y - r \\ = \text{छेकम} - \text{छेकन}$$

म्हणजे, दोन राशींच्या भागफळाची (quotient) छेद त्यांच्या छेदांच्या वियोगासमान असते.

$$\text{उपमाध्य १. छेक } \frac{१}{१} = -\text{छेक } १$$

उपसाध्य २.

$$\begin{aligned} \text{छेक } \left(\frac{त \times थ \times द \times \dots}{प \times फ \times ब \times \dots} \right) &= (\text{छेक } त + \text{छेक } थ + \text{छेक } द + \dots) \\ &\quad - (\text{छेक } प + \text{छेक } फ + \text{छेक } ब + \dots) \end{aligned}$$

१३.३३ (३) छेक $(म^n) = n$ छेक $म$ सिद्ध करणें.

$$\text{समजा छेक } म = य \quad \therefore म = क^य$$

$$\begin{aligned} \text{घाता } म^n &= (क^य)^न \\ &= क^{नय} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{छेक } (म^n) &= नय \\ &= n \text{ छेक } म \end{aligned}$$

म्हणजे, पळाच्या घात (power) युक्त संख्येची छेदा, त्या संख्येची छेदा आणि तिचा घातांक यांच्या गुणनफळाइतकी असते.

उपसाध्य.

$\text{छेक (तयथरदल...)} = \text{यछेकत} + \text{रछेकष} + \text{लछेकर} + \dots$

१३.३४ आता आपण

$$\text{छेकम} = \text{छेतम} \times \text{छेकष}$$

हें सिद्ध करूं.

समजा $\text{छेतम} = \text{य}$ आणि $\text{छेकष} = \text{र}$

$$\therefore \text{म} = \text{रय} \text{ आणि } \text{ल} = \text{कर}$$

$$\therefore \text{म} = \text{लर} = (\text{कर}) \text{ य} = \text{कयर}$$

म्हणून, परिभाषेनुसार,

$$\text{छेकम} = \text{यर}$$

$$= (\text{छेतम}) (\text{छेकष})$$

हें यत्र, $\text{छेतम} = \frac{\text{छेकम}}{\text{छेकष}}$ असेंहि लिहितां येतें.

याचरून दोनं यशीच्या एकाच आधारावरील छेदा माहीत असल्यास त्यांपैकी एका संख्येची दुसरी संख्या आधार घरून छेदा पाढतां येते.

उपसाध्य— यरील सूत्रांत $\text{म} = \text{क}$ घेऊन,

$$\text{छेकक} = \text{छेतक} \times \text{छेकष}$$

$$\text{पण } \text{छेकक} = १$$

$$\therefore १ = \text{छेतक} \times \text{छेकष}$$

$$\text{किया } \text{छेतक} = \frac{१}{\text{छेकष}}$$

१३.४ छेदांची सामान्य पद्धति किंवा दशच्छेदापद्धति.

नेहमी उपयोगांत येणाऱ्या छेदांच्या पद्धतींत १० हा आधार घेतलेला असतो, व तिला छेदांची सामान्य पद्धति किंवा दशच्छेदापद्धति (common system of logarithms) म्हणतात. १० हा आधार न लिहितां तो श्रद्धाहृत समजण्याचा प्रघात आहे. १० हा आधार घेऊन संख्यांच्या छेदा काढल्या असून त्या सारणीच्या रुपांत एकत्रित केल्या आहेत. या सारण्यांच्या साहाय्याने कोणत्याहि संख्येची छेदा सहजगत्या काढतां येते; उलटपक्षीं जर एखाद्या संख्येची छेदा माहीत असेल तर ती संख्याहि काढतां येते.

१३.५ लक्षण व दशमिकांश.

कोणत्याहि छेदेच्या अनुकल (integral) भागास छेदेचें लक्षण (characteristic) व तिच्या दशमिक (decimal) भागास छेदेचा दशमिकांश (mantissa) म्हणतात.

एखाद्या संख्येची छेदा क्रम असून अंशतः अनुकल व अंशतः दशमिक असेल तर अनुकल भागांत योग्य तो बदल करून दशमिक भाग नेहमी धन करण्याचा प्रघात आहे. म्हणून कोणत्याहि संख्येच्या छेदेचा दशमिकांश नेहमी धन असतो.

उदाहरणार्थ, एखाद्या संख्येची छेदा -४.४५११ असल्यास ती $-५+०.५४३९$ किंवा संक्षेपतः $\bar{५}.५४३९$ अशी लिहितात. लक्षणावरील शिरोदंड (bar) केवळ लक्षणच क्रम असून दशमिकांश धन असतो हें दर्शवितो.

१३.५१ कोणत्याहि संख्येच्या दशच्छेदेचें लक्षण निरीक्षण करून कसे लिहितां येतें हें आता आपण दाखवूं.

(१) प्रथम समजा की संख्या १ पेक्षा मोठी आहे. .

परिभाषेवरून, $१०^० = १$ \therefore छे $१ = ०$
 $१०^१ = १०$ \therefore छे $१० = १$
 \therefore $१०^२ = १००$ \therefore छे $१०० = २$
 $१०^३ = १०००$ \therefore छे $१००० = ३$

.....

यावरून १ व १० मधील कोणत्याहि संख्येची छेदा ० आणि १ मध्ये असते व म्हणून ती दशमिक भिन्न असून तिचें लक्षण शून्य आहे. १० व १०० मधील कोणत्याहि संख्येची छेदा १ आणि २ मध्ये असली पाहिजे व म्हणून तिचें लक्षण १ होईल. तसेंच १०० आणि १००० मध्ये असलेल्या कोणत्याहि संख्येच्या छेदेचें लक्षण २ असलें पाहिजे. यावरून आपणांस पुढील नियम मिळतो :—

१ पेक्षा मोठी असलेल्या कोणत्याहि संख्येच्या छेदेचें लक्षण घन असून तिच्या अनुकूल भागांतोळ अंकांच्या संख्ये-पेक्षा १ ने कमी असते.

उदाहरण. ३९७४ च्या अनुकूल भागांत तीन अंक आहेत. म्हणून ३९७४ च्या छेदेचें लक्षण २ आहे.

छे ५०१, छे २१२३, छे ३१५५ यांचीं लक्षणे अनुक्रमे १, ०, ३ आहेत.

(२) आता समजा की संख्या १ पेक्षा लहान आहे.
परिभाषेप्रमाणे, $१०^० = १$ \therefore छे १ = ०

$$१०^{-१} = \frac{१}{१०} = .१ \quad \therefore \text{छे } .१ = -१$$

$$१०^{-२} = \frac{१}{१०^२} = .०१ \quad \therefore \text{छे } .०१ = -२$$

$$१०^{-३} = \frac{१}{१०^३} = .००१ \quad \therefore \text{छे } .००१ = -३$$

.....

म्हणून १ व .१ मध्ये असलेल्या कोणत्याही संख्येची छेदा ० आणि -१ मध्ये असते व म्हणून ती -१ + एखादा दशमिकया समान आहे; अर्थात् तिचें लक्षण १ असते. .१ व .०१ मधील कोणत्याही संख्येची छेदा -१ आणि -२ या मध्ये आहे व म्हणून ती -२ + कोणतातरी दशमिक यासमान आहे; म्हणजेच तिचें लक्षण २ आहे. तसेंच, .०१ व .००१ मधील कोणत्याही संख्येचें छेदा-लक्षण ३ असतें. यावरून पुढील नियम मिळतो:—

१ पेक्षा लहान असलेल्या कोणत्याही संख्येचें छेदा-लक्षण कण असून, संख्येने, दशमिक विंदूनंतरलगेच येणाऱ्या शून्यांच्या संख्येपेक्षा १ ने मोठे असतें.

उदाहरण. छे-७६२८, छे-०००२६८१, छे-०४६२, छे-००२०२
यांचीं लक्षण अनुक्रमे १, ४, २, ३ आहेत.

१३५२ आता आपण दशमिकांशाविषयी पुढील प्रमेय सिद्ध करूं.

केवळ दशमिक विंदूंचीच स्थाने निरनिराळीं असलेल्या य तेच अंक एका ठराविक क्रमांत येऊन बनलेल्या संख्यांच्या छेदांचे दशमिकांश एकच असतात.

समजा क आणि ख या संख्या तेच अंक एका ठराविक क्रमांत येऊन बनलेल्या आहेत पण त्यांच्या दशमिक विंदूंची स्थाने मात्र निरनिराळी आहेत.

स एखादा धन वा ऋण पूर्णांक असल्यास,

$$स = क.१०^४$$

$$\therefore छे ख = छे (क.१०^४)$$

$$= छे क + छे १०^४$$

$$= छे क + स छे १०$$

$$= छे क + स$$

$$\therefore छे स - छे क = स$$

यावरून छे क आणि छे स यांमधील फरक एका अनुकूल संख्येइतका आहे, म्हणून त्यांचा दशमिकांश एकच आहे.

पुढील उदाहरणाने हें अधिक स्पष्ट होईल.

समजा छे ४८९२ - ३.६८९५ दिलेली आहे.

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{छे } ४८९.२ &= \text{छे } \frac{४८९२}{१०} \\
 &= \text{छे } ४८९.२ - \text{छे } १० \\
 &= ३.६८९५ - १ \\
 &= २.६८९५ \\
 \text{छे } ४.८९२ &= \text{छे } \frac{४८९२}{१०००} \\
 &= \text{छे } ४८९.२ - \text{छे } १००० \\
 &= ३.६८९५ - ३ \\
 &= ०.६८९५
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{छे } ०.००४८९२ &= \text{छे } \left(\frac{४८९२}{१०१} \right) \\
 &= \text{छे } ४८९.२ - \text{छे } १०१ \\
 &= ३.६८९५ - ६ \\
 &= ३.६८२५ \\
 \text{छे } ४८९२०० &= \text{छे } (४८९२ \times १००) \\
 &= \text{छे } ४८९२ + \text{छे } १०० \\
 &= ३.६८९५ + २ \\
 &= ५.६८९५
 \end{aligned}$$

यावरून केवळ ४, ८, ९, २ हेच अंक ४८९२ या क्रमाने येऊन बसलेल्या पण त्यांच्या दशमिक बिंदूची स्थाने भिन्न असलेल्या सर्व संख्यांचे छेदा-दशमिकांश एकच असतात हे दिसून येईल. वर दिलेल्या प्रत्येक संख्येच्या छेदेचे लक्षण

मागील अनुच्छेदांत दिलेले नियम लावून ताचडतोच मिळवितां येते हें विद्याव्यानी लक्षांत ठेवावें.

१३.६ छेदांच्या व अतिच्छेदांच्या (antilogarithm) सारण्या.

केंस्रच्या छेदा-सारणीच्या साखाने १ पासून १०००० पर्यंत कोणत्याहि संख्येची छेदा काढतां येते. या सारणीत (चार दशमिक स्थानांपर्यंत चरोपर असलेले) केवळ दशमिकाश असतात; पण दशमिक बिंदु लिहिलेला नसतो. १३.५१ या अनुच्छेदांत दिलेल्या नियमानुसार लक्षण काढून लिहावें लागतें.

१३.६१ उदाहरण. छे. २३८७ काढा.

निरांतरणाने छे. २३८७ चे लक्षण १ आहे.

∴ छे. २३८७ = १ + छे. २३८७ चा दशमिकांश.

पुस्तकाच्या शेवटी दिलेल्या छेदा-सारणीच्या पानावरील पाहिल्या स्तंभांतील २३ व पाहिल्या मोठ्ठींतील ८ या आकड्यां-कडून एवढा घटवा. २३ च्या समोर व ८ च्या खाली ३७६६ हा भागा आढे. २३८७ या दिलेल्या संख्येतील ७ या चवथ्या भंडवरता वियोग (difference) स्तंभ पहा. त्यांत ७ च्या खाली व २३ च्या समोर १३ हा आकडा आढे. हा वियोग ३७६ मध्ये मिळविण्यानंतर ३७७९ हा आकडा मिळतो. म्हणून १ए दशमिकांश ३७७९ आढे.

$$\therefore ८ \cdot २३८७ = १.३७७१.$$

अभ्यास. (१) छे ०२८७, (२) छे ६६६६,
(३) छे २५.४२ पाढा.

१३.६२ छेदा दिली असतांना तिची संख्या संख्या फाळणें हा उलटा प्रश्न अनंशदा उद्भवतो. प्रतिच्छेदासारणीचा उपयोग करून तो सोडविता येतो.

उदाहरण. २.२८६२ ही छेदा असलेली संख्या पाढा.

यांत २८६२ हा दशमिकांश आहे. जवळच लिहिल्या प्रतिच्छेदासारणीच्या पानावरील पहिल्या स्तंभातील २८ च पहिल्या ओळीतील ६ या आकऱ्यांकडे दृष्टि फेका. २ च्या समोर च ६ च्या खाली १९३२ हा आकडा आहे. २८६२ या दशमिकांशांतील २ या चवथ्या अंकाकरता वियोगस्तंभ पहा. त्यांत २८ च्या समोर च २ च्या खाली १ लिहिलेला आहे. हा वियोग १९३२ मध्ये मिळवून आपणांस १९३३ हा आकडा मिळतो.

म्हणून १९३३ या संख्येचा २८६२ या दशमिकांशाशी संबंध प्रस्थापित होतो.

परंतु दिलेलें लक्षण २ आहे. म्हणून इष्ट संख्येतलें दशमिक बिंदु तीन अंकांनंतर आला पाहिजे.

म्हणून १९३.३ ही इष्ट संख्या आहे.

अभ्यास. (१) ११७६२, (२) ०८५०१, (३) ३.४ या छेदा असलेल्या संख्या पाढा.

१३.७ त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या सारण्या.

०° पासून ९०° पर्यंत एक एक कोलेने कोण घाटवून मिळणाऱ्या सर्व कोणांच्या ज्या, कोटिज्या व स्पर्शज्या देणाऱ्या सारण्या आहेत. अशा सारण्यांना प्राकृत (natural) ज्या-सारणी, प्राकृत कोटिज्या-सारणी, व प्राकृत स्पर्शज्या-सारणी म्हणतात.

कर्धाकधी थापणांस त्रिकोणमितीय निष्पत्तींनी युक्त असलेल्या व्यंजकांची अर्ही काढावी लागते.

$$\text{उदाहरणार्थ, } \sin = \frac{\text{ज्या } २०^{\circ} ३५' \times \text{कोज्या } ५४^{\circ} ४०'}{\text{स्पर्श } ३३^{\circ} २४'}$$

$$\therefore \text{ऐसंऐ ज्या } २०^{\circ} ३५' + \text{ऐ कोज्या } ५४^{\circ} ४०' - \text{ऐ स्पर्श } ३३^{\circ} २४'$$

ऐज्या २०°३५ सारख्या त्रिकोणमितीय निष्पत्तींच्या ऐदा काढण्यासाठी थापण प्राकृत ज्या, कोटिज्या वगैरेच्या सारण्यांवरून प्रथम त्या निष्पत्तींच्या अर्ही काढून नंतर त्या अर्हीच्या ऐदा काढूं शकतो. पण असं करण्यांत थापणांम दोन निरनिराळ्या सारण्या पहाव्या लागतील. हे दुपट धम पांच-विण्यासाठी ०° ते ९०° मधील सर्व कोणांच्या ज्या, कोटिज्या, स्पर्शज्या यांच्या ऐदा घाटून त्या घेगळ्या सारण्यांच्या रूपांत मांडण्या आहेत. या सारण्यांना ऐदा ज्या-सारणी, ऐदा-कोटिज्या सारणी, व ऐदा स्पर्शज्या-सारणी म्हणतात.

१३.८ संख्यात्मक गणनांमध्य (calculations) छेदाच्या साहाय्येने, गुणाकाराचे योगांत व भागाकाराचे वियोगांत सुलभतेने परिवर्तन करता येते. ही छेदांची विशेष उपयुक्तता आहे. तसेंच कोणत्याहि संख्येचे एखाद्या घातास उल्लायन करणे किंवा तिचे मूळ (root) काढणे या क्लिष्ट क्रियांचे छेदांच्या साहाय्येने केवळ गुणाकार व भागाकार या क्रियांत रूपांतर करता येते. हें खालील उदाहरणांवरून स्पष्ट होईल.

उदाहरण१— ८३.२४ च्या ११ व्या मूळाचें ठोकळ मान काढा.

$$\text{समजा } y = (८३.२४)^{\frac{१}{११}}$$

$$\therefore \text{छे } y = \frac{१}{११} \text{ छे } ८३.२४$$

छेदासारणीवरून,

$$\text{छे } ८३.२४ = १.९२०३$$

$$\therefore \text{छे } y = \frac{१}{११} \times १.९२०३$$

$$= ०.१७४६ \text{ स्थूल मानाने.}$$

प्रतिच्छेदासारणीवरून,

$$०.१७४६ = \text{छे } १.४२५$$

$$\therefore \text{छे } y = \text{छे } १.४२५$$

$$\text{किंवा } y = १.४२५$$

उदाहरण २.

$$\sqrt[4]{\frac{(49)^0 \times 3 \sqrt{72}}{(93)^3 \times 3 \sqrt{19}}} \text{ चें मान काढा.}$$

समजा य हें इष्ट मान आहे.

$$\text{छेय} = \text{छे} \left\{ \frac{(49)^0 (72)^{\frac{3}{2}}}{(93)^3 (19)^{\frac{3}{2}}} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} [\text{छे}(49)^0 + \text{छे}(72)^{\frac{3}{2}} - \text{छे}(93)^3 - \text{छे}(19)^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{4} [0 \text{छे} 49 + \frac{3}{2} \text{छे} 72 - 3 \text{छे} 93 - \frac{3}{2} \text{छे} 19]$$

$$\text{छेदासारणीने, } \text{छे} 49 = 1.0709$$

$$\text{छे} 72 = 1.6493$$

$$\text{छे} 93 = 1.2644$$

$$\text{छे} 19 = 1.2744$$

$$\therefore \text{छेय} = \frac{1}{4} [(0 \times 1.0709) + (\frac{3}{2} \times 1.6493) - (3 \times 1.2644) - (\frac{3}{2} \times 1.2744)]$$

$$= \frac{1}{4} \times 6.422$$

$$= 1.6055 \quad \text{स्थूलमानाने.}$$

$$= \text{छे} 20.22 \quad \text{प्रतिच्छेदासारणीने.}$$

$$\therefore y = 20.22$$

उदाहरण ३. सिद्ध करा:—

$$६ छे \frac{१०}{९} + २ छे \frac{२४}{२५} - छे \frac{३}{५} + ३ छे \frac{८१}{८०} = छे ३$$

$$\text{वामपक्ष} = छे \left(\frac{१०}{९} \right)^३ + छे \left(\frac{२४}{२५} \right)^३ - छे \left(\frac{३}{५} \right) + छे \left(\frac{८१}{८०} \right)^३$$

$$= छे \left[\frac{\left(\frac{१०}{९} \right)^३ \left(\frac{२४}{२५} \right)^३ \left(\frac{८१}{८०} \right)^३}{\left(\frac{३}{५} \right)} \right]$$

$$= छे \left\{ \left(\frac{५ \times २}{३^३} \right)^३ \times \left(\frac{३ \times २^३}{५^३} \right)^३ \times \left(\frac{३^४}{५ \times २^४} \right)^३ \times \frac{५}{३} \right\}$$

$$= छे \left\{ \frac{५^०.२^{११}.३^{१४}}{३^{१३}.५^०.२^{१२}} \right\}$$

$$= छे ३ = \text{दक्षिणपक्ष}$$

रान्यथा:—

$$\text{वामपक्ष} = ६ छे \left(\frac{५.२}{३^३} \right) + २ छे \left(\frac{२^३.३}{५^३} \right) - छे \left(\frac{३}{५} \right)$$

$$+ ३ छे \left(\frac{३^४}{२^४.५} \right)$$

$$= ६ (छे ५ + छे २ - २ छे ३)$$

$$+ २ (३ छे २ + छे ३ - २ छे ५) - (छे ३ - छे ५)$$

$$+ ३ (४ छे ३ - ४ छे २ - छे ५)$$

$$= छे ३ = \text{दक्षिणपक्ष}$$

ઉદાહરણ ૪. ૩૭ થા ૭ થા આધારાચરીલ છેદા ધાલા.

૧૩.૩૪ થા અનુચ્છેદાનુસાર,

$$\text{છે. ૩૭} = \text{છે. ૩૭} \times \text{છે. ૧૦}$$

$$\begin{array}{r} \text{છે. ૩૭} \\ \hline \text{છે. ૩} \end{array}$$

$$= \frac{૧.૨૬૮૨}{૮૪૧૧}$$

છેદાસારણી યાપરૂન.

$$= ૧.૮૫૫૬$$

ઉદાહરણ ૫. પુઠાલ સમીકાર ઠોઠલ માનાને સોડ ધા.

$$\frac{૩૩૪}{૧૧૨૪+૧} = ૧૦૪-૧$$

દોઢી યાર્જવ્યા છેદા યેઝન,

$$૩ ય છે ૩ - (૨૪ + ૧) છે ૧૧ = (૪ - ૧) છે ૧૦ = (૪ - ૧)$$

$$૪ = \frac{૧ - છે ૧૧}{૧ + ૨ છે ૧૧ - ૩ છે ૩}$$

$$= \frac{૧ - ૧.૦૪૧૪}{+ ૨.૦ ૮૨૮ - ૧.૪૩૧૩}$$

છેદાસારણીને.

$$= \frac{-૦.૦૪૧૪}{૧.૬૫૧૫}$$

$$= -૦.૨૫૦૭ જાવલજાવલ$$

१३.२ अनुपाती भागांचा प्रनियम.

वै.सलच्या छेदासारणीच्या साक्षाने कोणत्याहि चार अंकी संख्येची छेदा काढता येते. परंतु जर आपणांस २५६३ व २५६४ या लागोपाठ येणाऱ्या संख्यांमधील एखाद्या संख्येची (उदाहरणार्थ २५६३.६ ची) छेदा काढायचा असेल तर त्याकरिता

“संख्येच्या छेदातील वाढ त्या संख्येतील वाढीशी अनुपाती असते”

या अनुपाती भागांच्या प्रनियमाचा (principle) उपयोग करावा लागतो.

पुढील उदाहरणांवरून या प्रनियमाचा उपयोग कसा करतात हे दिसून येईल.

उदाहरण १. छे ७२३५७ काढा.

प्रथम आपण ७२३५ व ७२६३ यांमध्ये असलेल्या ७२३५७ या संख्येची छेदा काढू.

छेदासारणीने, छे ७२३६ = ३८५१५

छे ७२३५ = ३८५१४

∴ छे ७२३६ - छे ७२३५ = ०००१

यावरून, ७२३५ या संख्येत १ ने वाढ झाली तर तिच्या छेदांत ०००१ इतकी वाढ होते.

म्हणून अनुपाती भागांच्या प्रनियमाने, सख्या ७ ने वाढली तर तिची छेदा

७ × ०००१ = ००००७ ने वाढेल.

$$\therefore \text{छे } ७२३५.७ = ३.८१९४ + .००००७ \\ = ३.८५९४७$$

$$\therefore \text{छे } ७२.३५७ = १.८५९४७$$

उदाहरण २. कोज्या $३१^{\circ}२३' = .८५५३$ दिली आहे, व $१'$ करिता फरक $= .००१७$ दिला आहे; तर कोज्या $३१^{\circ}२३'४०''$ काढा.

$$१' म्हणजे $६०''$ करिता फरक $= .००१७$$$

$$\therefore ४०'' \text{ करिता फरक} = \frac{४०}{६०} \times .००१७$$

$$= .००११ \text{ जवळजवळ}$$

आता, जसजसा कोण वाढतो तसतशी कोज्या कमी कमी होते.

$$\therefore \text{कोज्या } ३१^{\circ}२३'४०'' = .८५५३ - .००११ \\ = .८५४२$$

उदाहरणसंग्रह १८

(१) छे $७ = .८४५१$ व छे $१९ = १.२७८८$ दिल्या आहेत;

तर (१) छे १.३३ ,

(२) छे २४०.१ ,

(३) छे $^{\circ} \sqrt{१३३}$,

व (४) छे $^{\circ} \sqrt{.००३६१}$

यांच्या अर्हा काढा.

(२) .०८९, २.०५, .००००३, $\sqrt[3]{३६९६}$ व $(५२४७७)^{\frac{1}{2}}$

यांच्या छेदांचो लक्षण कोणती आहेत ?

(३) ०.१४५६ ला ०.०८०२३ ने गुणा व भागा.

(४) (१) $३३.३ \times ०.१२२ \times २.०२२$

$$(२) \frac{८.२५७ \times ११.३३ \times ५२९२}{३.१४५ \times १.३३२}$$

या प्रत्येकाचें मान काढा.

(५) गणन करा (calculate)—

$$(१) (०.३६)^{10}, \left(\frac{१}{६.०१}\right)^{24}, (५९२)^{0.001}$$

$$(२) ४६^{\frac{1}{2}}, (२.९)^{\frac{1}{3}}, (०.००१२२)^{\frac{1}{4}}$$

(६) सिद्ध करा—

$$(१) ७ छे $\frac{१६}{१५} + ५ छे $\frac{२५}{२४} + ३ छे $\frac{८१}{८०} = छे २$$$$$

[भलादायाद १९४०]

$$(२) ७ छे $\frac{१०}{९} - २ छे $\frac{२५}{२४} + ३ छे $\frac{८१}{८०} = छे २$$$$$

[कलकत्ता १९२३]

(७) डोकळ मान काढा—

$$(१) \frac{(२३.५)^2 \times (५२३)^2}{१ - (०.३५२)^2}$$

[मद्रास १९४२]

$$(२) \sqrt{\frac{१७^{\frac{1}{2}} \times ३^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{५२} \cdot \sqrt{८९}}}$$

$$(३) \frac{(ज्या ७०^{\circ}३३')^५ (स्य ४०^{\circ}५०')^३}{(२३३३)^३ कोज्या ५५^{\circ}४'}$$

(८) छे, ८८९, छे, ८९८, छे, ९३३२ काढा.

(९) जर छे, . क = ख असेल तर छे, .. क आणि छे, ... क काढा. [मिथई. १९०१]

(१०) कोणत्याहि छेदापद्धतीचे

(१) २ या आधारापासून १२८ या आधारावर

(२) ३ या आधारापासून ८९ या आधारावर

(३) ४९ या आधारापासून ७ या आधारावर परिवर्तन करणारा गुणक काढा.

(११) (अ) (१) $२^{०३}$, (२) $३^{४४}$ यातील अंकांची संख्या काढा.

.. (आ) (१) $२^{-११}$, (२) $३^{-१३}$ यातील पहिल्या ठळक (significant) अंकांचे स्थान काढा.

(१२) पुढील समीकार ठोळक मानाने सोडवा.

$$(१) ७^{२५} - ९ (७^{५}) + १४ = ० \quad [\text{जान्र १९३३}]$$

$$(२) \frac{२^{१५}}{३^{५}-१} = ७^{५+१}$$

$$(३) २^{५-१} = ३^{१+१}, २^{५-१} \times ७^१ = ९$$

- (१३) छे ९६४१ = ३.२८११
 छे ९६४२ = ३.२८४२
 दिल्या आदेत; तर अनुपाती भागांचा प्रनियम घापरून
 छे $(\cdot ९६४१८)^3$ काढा.
- (१४) स्प $५१^{\circ}६' = १.२३९३$ घ स्प $५१^{\circ}७' = १.२४०१$ दिल्या
 आदेत; तर अनुपाती भागांच्या प्रनियमाने
 स्प $५१^{\circ}६'२५''$ काढा.

प्रकरण चवदावें

त्रिकोणांचे निर्धारण

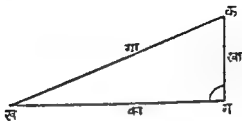
१४.१ त्रिकोणाच्या तीन बाजू व तीन कोण यांना त्याचे अवयव (elements) म्हणतात. ज्यांपैकी निदान एक अवयव बाजू आहे असे कोणतेहि तीन अवयव दिले असल्यास त्रिकोण काढतां येतां हें रेखिकीवरून आपणांस माहीत आहे. त्याचप्रमाणे एखाद्या त्रिकोणाचे कोणतेहि तीन अवयव (ज्यांपैकी एक अवयव एक बाजू आहे) दिले असल्यास त्रिकोणमितीने आपणांस हाकीचे अवयव काढतां येतात. या क्रियेस त्रिकोणाचे निर्धारण (solution of the triangle) म्हणतात.

पूर्वी सांगितल्याप्रमाणे फक्त या त्रिकोणाचे कोण क, ख, ग या अक्षरांनी व त्यांच्या समोरील बाजू अनुक्रमे क, ख, ग या अक्षरांनी दर्शविल्या जातात.

प्रथम आपण लंबकोणत्रिकोणांच्या निर्धारणाचें विवेचन करूं. पुढील दोन अनुच्छेदांत \angle ग लंबकोण घेतला आहे.

१४.२ प्रकार १. दोन याजू दिव्या असतांना त्रिकोणाचें निर्धारण करणें.

(१) समजा का, खा या याजू दिव्या आहेत.



आ. १४.१

$$\text{आता ह्य क} = \frac{\text{का}}{\text{खा}}$$

$$\therefore \text{छे ह्य क} = \text{छे का} - \text{छे खा}$$

आता का, खा दिलेल्या आहेत. म्हणून छे ह्य क आणि त्यापासून क मिळतो.

आणि ख हा कोण ख $= 90^\circ - \text{क}$ या संबंधावरून माहीत होतो.

$$\text{गा} = \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} \quad \text{किंवा} \quad \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} \quad \text{किंवा} \quad \sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$$

यांपैकी कोणत्याहि एका संबंधावरून कर्ण गा काढतां येतो.

गा $= \sqrt{\text{का}^2 + \text{खा}^2}$ हा संबंध छेदांच्या गणनेसाठी

सोयीचा नसल्यामुळे गा $= \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}}$ किंवा गा $= \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$ हा संबंध वापरणेंच अधिक चांगलें असतें.

(२) समजा कर्ण गा व एक बाजू का ही दिली आहेत.
(आकृति १४.१ पहा)

क हा कोण, ज्या क = $\frac{\text{का}}{\text{गा}}$ या समीकारापासून मिळतो.

(हा समीकार आणि या व पुढच्या अनुच्छेदांत येणारे असे सर्व समीकार सारण्यांच्या साहाय्याने सोडवावेत.)

नंतर ख ($= 90^\circ - \text{क}$) माहीत होतो.

खा ही बाजू,

खा = गा ज्या ख किंवा का कोस क किंवा $\sqrt{\text{गा}^2 - \text{का}^2}$,

यांपैकी कोणत्याहि एका संबंधावरून मिळते.

१४.२१. प्रकार २— एक न्यूनकोण व एक बाजू दिली असतांना त्रिकोणाचे निर्धारण करणे.

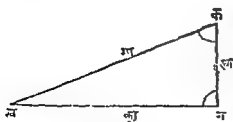
(१) समजा कोण क व बाजू खा ही दिली आहेत.

ख, का आणि गा
अनुक्रमे

ख = $90^\circ - \text{क}$,

का = खा स्प क,

गा = $\frac{\text{खा}}{\cos \text{क}}$



आ. १४.२

या संबंधांवरून निश्चित करता येतात.

(२) समजा कोण क व कर्ण गा हे दिले आहेत. (आकृति १४.२ पहा.)

ग, का आणि खा अनुक्रमे

$$ख = ९०^{\circ} - क,$$

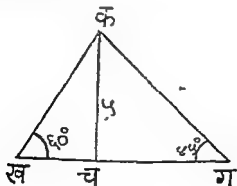
$$खा = गा कोज्या क,$$

$$का = गा ज्या क,$$

या समीकारांचरून माहीत होतात.

१४.२२ 'उंची आणि अंतर' यांवरील प्रश्न सोडवितांना घरील माहिती उपयोगी पडेल.

१४.२३ उदाहरण १. कखग त्रिकोणांत खग या पायाला कच रेखा लंब आहे. $ख = ६०^{\circ}$, $ग = ४१^{\circ}$, कच = ५ असेल त्यास खा व गा काढा.



आ. १४.३

कचग त्रिकोणांत,

$$\text{ज्या ग} = \frac{\text{कच}}{\text{कग}}$$

$$\therefore \text{ज्या } 45^\circ = \frac{५}{\text{गा}}$$

$$\text{किंवा खा} = ५\sqrt{२}.$$

कखच त्रिकोणांत,

$$\text{ज्या ख} = \frac{\text{कच}}{\text{कख}}$$

$$\therefore \text{ज्या } 60^\circ = \frac{५}{\text{गा}}$$

$$\text{किंवा गा} = \frac{५ \cdot २}{\sqrt{३}} = \frac{१०\sqrt{३}}{३}$$

उदाहरण २. कखग त्रिकोणांत $\angle क = 90^\circ$, $खा = ४५$,
 $गा = ६०$ असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा.



आ. १४०४

$$\text{आता स्प ख} = \frac{\text{खा}}{\text{गा}}$$

$$= \frac{४५}{६०}$$

$$= \frac{३}{४}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{छे स्फ ख} &= \text{छे ४५} - \text{छे ६९} \\
 &= १.६५३२ - १.८३८८ \\
 &= -०.१८५६ \\
 &= \overline{१.८१४४}
 \end{aligned}$$

छेदासारणीवरून

\therefore

छेदा-स्पर्शज्या सारणीवरून,
छे स्फ ३३°७' = $\overline{१.८१४५}$

$$\therefore \text{ख} = ३३^{\circ} ७' \text{ जवळजवळ.}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{ग} &= ९०^{\circ} - \text{ख} \\
 &= ९०^{\circ} - ३३^{\circ} ७' \\
 &= ५६^{\circ} ५३'
 \end{aligned}$$

$$\text{पुण्या का} = \frac{\text{घा}}{\text{ज्या ख}}$$

$$\text{बिपा का} = \frac{\text{४'५}}{\text{ज्या ३३°७'}}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{छे का} &= \text{छे ४'५} - \text{छे ज्या ३३°७'} \\
 &= ०.१५३२ - १.७३७५ \quad \text{सारणीवरून} \\
 &= ०.१५३२ + १ - ७३७५ \\
 &= ०.११५७ \\
 &= \text{छे } ८.२३५ \quad \text{प्रतिच्छेदागार्ज्याने}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{बा} = ८.२३५$$

उदाहरणसंग्रह १९

- (१) कखग त्रिकोणांत ग हा लंबकोण आहे. का = १२, खा = ३ $\sqrt{२}$ असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा.
- (२) कखग त्रिकोणांत क = ९०° , खा = ४०, ग = १५° असल्यास वाजू काढा.
- (३) कखग त्रिकोणांत \angle ग = ९०° , खा = ४.३, गा = ८.६ असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा.
- (४) कखग त्रिकोणांत खग ला कच लंब आहे. खच = ९ पाद, \angle ख = ३०° , \angle ग = ४०° असल्यास कख, कग, कच आणि गच यांच्या लांबी काढा.

१४.३ आता आपण कोणत्याही त्रिकोणाच्या निर्धारणा-
येथीं विवेचन करूं.

सामान्यतः, ज्यांत एका वाजूचा समावेश होतो असे, त्रिकोणाचे तीन अवयव दिले असल्यास त्रिकोणाचे पूर्णपणे निर्धारण करता येतं हें आपणांस माहीतच आहे. आता तीन अवयव घेण्याचे पुढील चार प्रकार असू शकतात.

प्रकार १. तीन वाजू

प्रकार २. दोन वाजू व अंतर्गत (included) कोण

प्रकार ३. एक वाजू व दोन कोण

प्रकार ४. दोन वाजू व त्यांपैकी एकीच्या समोरील कोण

त्रिकोणाचे केवळ तीनच कोण दिलेले असल्यास त्याचें निर्यारण करणें शक्य नसतें. या प्रकाराचा विचार स्वतंत्रपणें १४.८ या अनुच्छेदांत केला आहे.

१४.९ प्रकार १. कालग त्रिकोणाच्या तीन बाजू दिलेल्या आहेत

$$\text{आता } \sin \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$\therefore \cos \frac{K}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos(\text{सा} - \text{खा}) + \cos(\text{सा} - \text{गा}) - \cos \text{सा} - \cos(\text{सा} - \text{का}) \right\}$$

का, खा, गा बाजू दिल्या आहेत.

म्हणून सा $\left(= \frac{\text{का} + \text{खा} + \text{गा}}{2} \right)$ ही राशि आणि तिच्यावरून (सा - का), (सा - खा), व (सा - गा) या राशी काढतां येतात.

नंतर घरील समीकारावरून $\frac{K}{2}$, व म्हणून क, सारण्यांच्या साहाय्याने काढतां येतो.

तसेंच, $\sin \frac{K}{2}$ च्या सूत्रावरून ख, व नंतर $\text{ग} = 180^\circ - \text{क} - \text{ख}$ वरून ग काढतां येतो.

ज्या अ = ज्या (१८०° - अ) असल्यामुळे आपल्याला दिलेल्या ज्ये वरून कोणाच्या दोन ऋजुपूरव अर्धा मिळतात. म्हणून निश्चित केलेला कोण संदिग्ध असतो. म्हणून अर्ध-कोणाच्या ज्याची सूत्रे वापरता येत नाहीत उलट

$$\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा - का)}}{\text{सा गा}}}$$

$$\text{व कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा - खा)}}{\text{गा का}}}$$

ही अर्धकोणाच्या कोटिज्यांची सूत्रे वापरण्यास हरकत नाही.

या सूत्रांवरून $\frac{\text{क}}{२}$ आणि $\frac{\text{ख}}{२}$ असंदिग्ध रीतीने पाढता येतात.

परंतु यांचा उपयोग करतांना सा, (सा - का), (सा - खा), का, खा, गा या सहा राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात, उलट अर्धकोणांच्या स्पर्शज्यांची सूत्रे वापरताना सा, (सा - का), (सा - खा) व (सा - गा) या चारच राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात

म्हणून, जव्हा सर्व कोण पाढण्यासाठी सारण्याचें साह्य घेणें आवश्यक असेल तेव्हा स्पर्शज्यांच्या सूत्रांचा उपयोग करणें सर्वांत चांगले असतें परंतु एकच कोण ह्या असेल तर ज्या, कोटिज्या, स्पर्शज्या यांमधीं कोणत्याहि एकीच्या सूत्रांचा उपयोग केला तरी चालतो

त्रिकोणाचे केवळ तीनच कोण दिलेले असल्यास त्यांचे निर्धारण करणे शक्य नसते. या प्रकाराचा विचार स्वतंत्रपणे १४.६ या अनुच्छेदांत केला आहे.

१४.७ प्रकार १. कलम त्रिकोणाच्या तीन बाजू दिलेल्या आहेत.

$$\text{आता } \sin \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$\therefore \cos \frac{K}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \cos(s-a) + \cos(s-b) - \cos(s-c) \right\}$$

का, खा, गा बाजू दिल्या आहेत.

म्हणून सा $\left(= \frac{का + खा + गा}{2} \right)$ ही राशि आणि तिच्यावरून $(s-a)$, $(s-b)$, व $(s-c)$ या राशी काढता येतात.

नंतर घरील समीकारावरून $\frac{K}{2}$, व म्हणून क, सारण्यांच्या साहाय्याने काढता येतो.

तसेच, $\sin \frac{K}{2}$ च्या सूत्रावरून ख, व नंतर $\sin = 180^\circ - क - ख$ वरून ग काढता येतो.

ज्या अ = ज्या (१८०° - अ) असल्यामुळे आपल्याला दिलेल्या ज्ये वरून कोणाच्या दोन ऋजुपूरक अर्धा मिळतात. म्हणून निश्चित केलेला कोण संदिग्ध असतो. म्हणून अर्ध-कोणांच्या ज्यांचीं सूत्रे वापरतां येत नाहीत. उलट

$$\text{कोज्या } \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा (मा - का)}}{\text{सा गा}}}$$

$$\text{व कोज्या } \frac{\text{ख}}{२} = \sqrt{\frac{\text{सा (सा - खा)}}{\text{मा का}}}$$

ही अर्धकोणांच्या कोटिज्यांचीं सूत्रे वापरण्यास हरकत नाही.

या सूत्रांवरून $\frac{\text{क}}{२}$ आणि $\frac{\text{ख}}{२}$ असंदिग्ध रीतीने पाडतां येतात.

परंतु यांचा उपयोग करतांना मा, (सा - का), (सा - खा), का, खा, गा या सहा राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात; उलट अर्धकोणांच्या स्पर्शज्यांचीं सूत्रे वापरतांना सा, (सा - का), (सा - खा) व (सा - गा) या चारच राशींच्या छेदा काढाव्या लागतात.

म्हणून, जव्हां सर्व कोण पाडण्यामाठी सारण्यांचे साह्य घेणे आवश्यक असेल तेव्हां स्पर्शज्यांच्या सूत्रांचा उपयोग करणे सर्वांत चांगले असते. परंतु एकच कोण द्या असेल तर ज्या, कोटिज्या, स्पर्शज्या यांपैकी कोणत्याहि एकीच्या सूत्रांचा उपयोग केला तरी चालतो.

पुढील कोटिज्या-नियमावरूनहि कोण काढतां येतात.

$$\text{कोज्या क} = \frac{\text{खा}^2 + \text{गा}^2 - \text{का}^2}{2 \text{ खा गा}},$$

$$\text{कोज्या ख} = \frac{\text{गा}^2 + \text{का}^2 - \text{खा}^2}{2 \text{ गा का}}$$

ही सूत्रे छेदा-गणनाकरिता सोयीस्कर नाहीत. का, खा, गा लहान संख्या असतील तेव्हांच त्यांचा उपयोग करावा.

१४.४१ उदाहरण. का=४७, खा=५३, गा=२२ असल्यास सर्व कोण दाढा.

$$\text{माता सा} = \frac{४७ + ५३ + २२}{२} = ६१.$$

$$\text{सा - का} = ६१ - ४७ = १४, \text{ सा - खा} = ६१ - ५३ = ८ \text{ आणि}$$

$$\text{सा - गा} = ६१ - २२ = ३९.$$

$$\therefore \text{स्प} \frac{\text{क}}{२} = \sqrt{\frac{(\text{सा} - \text{खा})(\text{सा} - \text{गा})}{\text{सा}(\text{सा} - \text{का})}}$$

$$= \sqrt{\frac{८ \times ३९}{६१ \times १४}}$$

$$\therefore \text{छे स्प} \frac{\text{क}}{२} = \frac{१}{२} \left\{ \text{छे } ८ + \text{छे } ३९ - \text{छे } ६१ - \text{छे } १४ \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -2031 + 1.4911 - 1.0643 \right. \\ \left. - 1.1861 \right\} \text{ હેડાભારણીને.}$$

$$= \frac{1}{2} (-0.8392) \\ = -0.4196 \\ = -1.0618 \\ = \text{હે સ્પ } 31^{\circ} 5' \text{ હેડા-સ્પર્શકયા સારણીવરૂન}$$

$$\therefore \frac{\phi}{2} = 31^{\circ} 5' \text{ ય } \phi = 62^{\circ} 10'$$

$$\text{પુનઃ સ્પ } \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{(\text{સા} - \text{ગા}) (\text{સા} - \text{કા})}{\text{સા} (\text{સા} - \text{લા})}} \\ = \sqrt{\frac{39 \times 18}{61 \times 6}}$$

$$\therefore \text{હે સ્પ } \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \text{હે } 39 + \text{હે } 18 - \text{હે } 61 - \text{હે } 6 \right\} \\ = \frac{1}{2} \left\{ 1.4911 + 1.1861 - 1.0643 \right. \\ \left. - 0.2031 \right\} \\ = \frac{1}{2} (0.4099) \\ = 0.2049$$

આતા છેદા-સ્પર્શજ્યા સારણીવચ્ચ

$$\text{છે સ્પ } ૪૬^{\circ}૩૬' = ૦.૦૨૪૩,$$

$$\text{આણિ છે સ્પ } ૪૬^{\circ}૩૭' = ૦.૦૨૪૬$$

મહાનૂત છે સ્પ $૪૬^{\circ}૩૬'$ ચ છે સ્પ $૪૬^{\circ}૩૭'$ યાંમધે

$$\text{છે સ્પ } \frac{૧}{૨} \text{ આહે.}$$

$\therefore ૪૬^{\circ}૩૬'$ ચ $૪૬^{\circ}૩૭'$ યાંમધે $\frac{૧}{૨}$ આહે.

$$\text{સમજા } \frac{૧}{૨} = ૪૬^{\circ}૩૬' ૪''$$

$$\text{મગ, } ૪'' \text{ કરિતા ફરક} = \text{છે સ્પ } \frac{૧}{૨} - \text{છે સ્પ } ૪૬^{\circ}૩૬'$$

$$= ૦.૦૨૪૪ - ૦.૦૨૪૩$$

$$= ૦.૦૦૦૧$$

$$\text{આણિ } ૬૦'' \text{ કરિતા ફરક} = \text{છે સ્પ } ૪૬^{\circ}૩૭'$$

$$- \text{છે સ્પ } ૪૬^{\circ}૩૬'$$

$$= ૦.૦૨૪૬ - ૦.૦૨૪૩$$

$$= ૦.૦૦૦૩.$$

$$\therefore \frac{૧}{૬૦} = \frac{૦.૦૦૦૧}{૦.૦૦૦૩} = \frac{૧}{૩}$$

$$\text{કિંના } ૧ = \frac{૬૦}{૩} = ૨૦$$

$$\therefore \frac{ख}{२} = ४६^{\circ} ३६' २०''$$

$$\therefore ख = ९३^{\circ} १२' ४०''$$

$$\begin{aligned}\therefore ग &= १८०^{\circ} - क - ख \\ &= १८०^{\circ} - ६२^{\circ} १८' - ९३^{\circ} १२' ४०'' \\ &= २४^{\circ} २९' २०''\end{aligned}$$

उदाहरणसंग्रह २०

- (१) एका त्रिकोणाच्या बाजू ८, १० व १२ आहेत; तर त्याचा महत्तम कोण लघुत्तम कोणाच्या दुप्पट आहे हे दाखवा.
- (२) एका त्रिकोणाच्या बाजू ७५३, ३७५ व ८७२ आहेत; तर त्याचा लघुत्तम कोण काढा.

[मद्रास १८९७]

- (३) एका त्रिकोणाच्या बाजू २:३:४ या प्रमाणांत आहेत; तर त्रिकोणाचे निर्धारण करा.
- (४) एका त्रिकोणाच्या बाजू अनुक्रमे ५७, १५ व ४८ पाद लांब आहेत; तर त्याचा महत्तम कोण १२०° आहे हे सिद्ध करा.

पुढे दिलेल्या अथवावांचून त्रिकोणाचे निर्धारण करा—

- (५) का = २२४, खा = २५६, गा = २८८.

$$(६) का = \frac{\sqrt{३}+१}{२\sqrt{२}}, खा = \frac{\sqrt{३}-१}{२\sqrt{२}}, गा = \frac{\sqrt{३}}{२}$$

[यनारस १९३५]

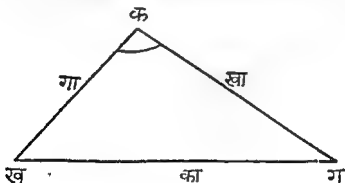
$$(७) का = २, खा = \sqrt{३}+१, गा = \sqrt{६}$$

$$(८) का = ३५.५६, खा = ४५.६६, गा = ५६.७८$$

[आंध्र १९४२]

१४.५ प्रकार २. त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि अंतर्गत कोण ही दिली आहेत.

समजा, फखग त्रिकोणाच्या खा व गा या बाजू व त्यांचा अंतर्गत कोण फ हे दिले असून खा बाजू गा पेक्षा मोठी आहे.



भा. १४.५

१०.६ या अनुच्छेदानुसार

$$\text{स्प } \frac{ख-ग}{२} = \left(\frac{खा-गा}{खा+गा} \right) \text{ कोस्प } \frac{फ}{२}$$

$$\therefore \text{छे स्फ } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} = \text{छे (ख-गा)} - \text{छे (बा+गा)} \\ - \text{छे स्फ } \frac{\text{क}}{२} \dots\dots (१)$$

$$\text{शिवाय } \frac{\text{ख}+\text{ग}}{२} = ९०^{\circ} - \frac{\text{क}}{२} \dots\dots\dots (२)$$

$$(१) \text{ व } (२) \text{ या संबंधांवरून } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{२} \text{ व } \frac{\text{ख}+\text{ग}}{२}$$

मिलतात व त्यांचा योग आणि विशेष करून ख आणि ग हे कोण काढता येतात.

$$\text{नंतर } \frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}}$$

किंवा छे का = छे खा + छे ज्या क - छे ज्या ख
या सूत्रावरून का मिळते.

का^२ = खा^२ + गा^२ - २ खा गा कोज्या क या संबंधा-
पासूनहि का काढता येते.

पूर्वो सांगितल्याप्रमाणे खा आणि गा लहान संख्या
असतील तेव्हाच या सूत्राचा उपयोग करावा.

१४.५१ उदाहरण. एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू ७:५ या
प्रमाणांत असून त्यांचा अंतर्गट कोण १०२°३६' आहे; तर
याकीचे कोण काढा.

$$\text{समजा } \frac{\text{खा}}{\text{गा}} = \frac{७}{५}$$

म्हणून, पक्षावरून, या आणि गा घाजूमधील अंतर्गत कोण $\alpha = 102^\circ 36'$

$$\begin{aligned}\therefore \text{स्य } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{2} &= \left(\frac{7-5}{7+5}\right) \cos\left(\frac{102^\circ 36'}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6} \cos 51^\circ 18' \\ &= \frac{1}{6} \text{ स्य } 36^\circ 42'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{छे स्य } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{2} &= \text{छे स्य } 36^\circ 42' - \text{छे } 6 \\ &= 1.2037 - 0.962 \text{ सारणीवरून} \\ &= 1.1244\end{aligned}$$

आता, सारणीवरून,

$$\text{छे स्य } 7^\circ 36' = 1.1242, \text{ व छे स्य } 7^\circ 37' = 1.1262$$

$$\therefore 7^\circ 36' \text{ व } 7^\circ 37' \text{ मध्ये } \left(\frac{\text{ख}-\text{ग}}{2}\right) \text{ आहे.}$$

$$\text{समजा } \frac{\text{ख}-\text{ग}}{2} = 7^\circ 36' \text{ य'}$$

$$\text{य' करिता फरक} = 1.1244 - 1.1242 = 0.0002$$

$$\text{व } 60'' \text{ करिता फरक} = 1.1262 - 1.1242 = 0.0020$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{60} = \frac{0.0002}{0.0020} = \frac{2}{20}$$

$$\therefore \text{य} = 12$$

$$\therefore \frac{\text{ख} - \text{ग}}{2} = 6^{\circ} 26' 16'' \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{दियाय } \frac{\text{ख} + \text{ग}}{2} &= 90^{\circ} - \frac{\text{क}}{2} \\ &= 90^{\circ} - 41^{\circ} 16' \\ &= 48^{\circ} 42' \quad \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

- (1) आणि (2) यांच्या योगाने भाजे वियोगाने,
 $\text{ख} = 46^{\circ} 16' 16''$,
 $\text{ग} = 31^{\circ} 48' 2''$

उदाहरणसंग्रह २१

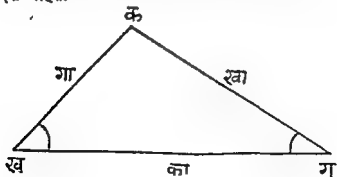
चलन त्रिकोणात,

- (१) का = २४२, खा = १६३, $\angle \text{ग} = 43^{\circ}$ असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा. [नागपूर १९४६]
- (२) का = ३, खा = १, $\text{ग} = 43^{\circ} 3' 46''$ असल्यास क आणि ख काढा. [नागपूर १९५१]
- (३) गा = २१०, का = ११०, $\text{ख} = 34^{\circ} 8' 23''$ असल्यास ग आणि क काढा. [नागपूर १९३२]
- (४) का, खा या याजू १५:११ या प्रमाणांत अन्तून $\frac{\text{ग}}{2} = \frac{१६}{१५}$ असल्यास क आणि ख काढा.
- (५) खा = २गा व कोण क = 60° असल्यास ख, ग हे कोण आणि का चे खा शी असलेले प्रमाण काढा.

- (६) का = ३०, खा = २० व अंतर्गत कोण २२° आहे; तर याकीचे कोण काढा. [घनारस १९३९]
- (७) खा = २७, गा = २३, क = $४३^{\circ} ३०'$ आहेत; तर ख आणि ग काढा. [घनारस १९४१]
- (८) खा = १३१, गा = ७२, क = ४०° असल्यास ख आणि ग काढा. [अलाहाबाद १०३८]
- (९) खा आणि गा यांचे प्रमाण ७:३ असून अंतर्गत कोण क ६०° आहे; तर ख आणि ग काढा. [अलाहाबाद १९४०]
- (१०) खा = $\sqrt{६}$, गा = $३ - \sqrt{३}$, क = ७५° आहेत; तर त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

(सूचना— का^२ = खा^२ + गा^२ - २खागा कोज्या क वापरा.)

१४६ प्रकार ३. त्रिकोणाची एक बाजू व दोन कोण हे दिले आहेत.



मा. १४-६

સમજા, કણગ ત્રિકોણાચી કા હી દાજૂ આણિ ય, ગ છે
કોણ દિલેલે આદેત.

ય, ગ દિલેલે અસલ્યામુલે $ક = ૧૮૦^\circ - ય - ગ$ યા
સમીકારાવરૂન ક માર્દીત હોતો.

$$લા = \frac{કા જ્યા ય}{જ્યા ક}$$

ફિચા છે ય; = છે કા + છે જ્યા ય - છે જ્યા ક

$$તસેંચ, ગા = \frac{કા જ્યા ગ}{જ્યા ક}$$

ફિચા છે ગા = છે કા + છે જ્યા ગ - છે જ્યા ક .:

યા સંયંધાંવરૂન લા આણિ ગા નિશ્ચિત હોતાત.

૧૪૬૧ ઉદાહરણ. કણગ ત્રિકોણાંત, કા = ૪૨૭,
ય = ૩૦°, ગ = ૭૦°૩૫' અસલ્યાસ લઘુત્તમ યાજૂ કાઢા.

$$\begin{aligned} \text{આતા } ક &= ૧૮૦^\circ - ય - ગ \\ &= ૧૮૦^\circ - ૩૦^\circ - ૭૦^\circ ૩૫' \\ &= ૭૯^\circ ૨૫' \end{aligned}$$

ય હા લઘુત્તમ કોણ અસલ્યામુલે ય સમોરીલ લા હી
યાજૂ લઘુત્તમ અસલી પાદિજે.

$$\text{આતા } લા = \frac{કા જ્યા ય}{જ્યા ક}$$

(આ') જરૂર $આ = ગા$ અસેલ તર $અ = ગ$ અસતો. મ્હણૂન ગ અધિકકોણ હતો, આણિ મ્હણૂન ત્રિકોણ શક્ય નસતો.

(ઈ') જરૂર $આ > ગા$ અસેલ તર $અ > ગ$ અસતો. મ્હણૂન (૧) ઘરૂન મિલ્લણારી ગ ર્ચી કેવલ ન્યૂન અર્ધાંશ ગ્રાહ્ય અસતે. મ્હણૂન કેવલ એક ત્રિકોણ શક્ય અસતો.

આતા આપણ ઘરીલ સર્વ ફલાર્થે સંકલન કરું.

(૧) જરૂર $આ < ગા$ જ્યાં $અ$ અસેલ તર એકહિ ત્રિકોણ શક્ય નસતો.

(૨) જરૂર $આ = ગા$ જ્યાં $અ$ અસેલ તર એક લંબકોણ ત્રિકોણ અસતો.

(૩) જરૂર $આ > ગા$ જ્યાં $અ$ આણિ $< ગા$ અસૂન $અ$ ન્યૂન અસેલ તર દોન ત્રિકોણ શક્ય અસતાત.

(૪) જરૂર $આ > ગા$ કિંવા $= ગા$ આણિ મ્હણૂન અવશ્યમેવ $> ગા$ જ્યાં $અ$ અસૂન $અ$ ન્યૂન અસેલ તર ગ ન્યૂન અસલેલા એક ત્રિકોણ શક્ય અસતો.

(૫) જરૂર જો અધિકકોણ અસેલ તર $આ > ગા$ અસતાનાં એક ત્રિકોણ શક્ય અસતો, નાહીતર એકહિ ત્રિકોણ શક્ય નસતો.

આ, ગા આણિ અ યાંજ્યા કાંદી વિધાનિત પ્રદર્શ અસ-
લ્યાસ ત્રિકોણ નિશ્ચિત કરતાંના સંદેહ કિંવા સંદિગ્ધતા
નિર્માણ હોતે; મ્હણૂન યા પ્રકારાસ ત્રિકોણ-નિર્ધારણાં
સંદિગ્ધ પ્રકાર મ્હણતાત.

अर्थात् ज्या ग < 1 होते; याणि समीकार (१) चरून ग ज्या दोन अर्ही मिळतात. यांपैकी एक अर्ही न्यून व दुसरी अधिक असून या दोन अर्ही एकमेकांना कजुपूर्व असतात.

परंतु या दोन्ही अर्ही नेहमीच ग्राह्य असतात असें नाही. खालील उपप्रकारांचा आता विचार करूं.

(इ.) जर $खा > गा$ असेल तर $ख > ग$ असतो. पण दिलेला कोण $ख$ न्यून आहे, म्हणून ग सुद्धा न्यून कोण असला पाहिजे. $ख > ग$ असल्याने, ग अधिककोण असल्यास ख सुद्धा अधिककोण होईल. म्हणून ग ची अधिक अर्ही ग्राह्य नाही. या प्रकारांत ग ची एकच अर्ही असते.

(इ.) जर $खा = गा$ असेल तर $ख = ग$ असतो. म्हणून या प्रकारांत सुद्धा ग ची एकच अर्ही असू शकते व ती न्यून असते.

(इ.) जर $खा < गा$ असेल तर $ख < ग$ असतो. या प्रकारांत ग ज्या दोन्ही अर्ही ग्राह्य आहेत. ग ज्या दोन अर्ही-चरून क ज्याहि दोन अर्ही मिळतात. नंतर समीकार (२) चरून का ज्या दोन अर्ही मिळतात. म्हणून या प्रकारांत दिलेले प्रतिबंध (conditions) पाळणारे दोन त्रिकोण असतात.

आता ख हा अधिककोण आहे असें समजा.

(अ') जर $खा < गा$ असेल तर $ख < ग$ असतो. म्हणून ग अधिककोण होतो. या प्रकारांत त्रिकोण शक्य नसतो.

(भा') जर खा = गा असेल तर ख = ग असतो. म्हणून ग अधिककोण होतो, आणि म्हणून त्रिकोण शक्य नसतो.

(इ) जर खा > गा असेल तर ख > ग असतो. म्हणून (१) वरून मिळणारी ग ची फेवळ न्यून अर्हाच ग्राह्य असते. म्हणून फेवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

आता आपण घरील सर्व फलांचें संकलन करूं.

(१) जर खा < गा ज्या ख असेल तर एकहि त्रिकोण शक्य नसतो.

(२) जर खा = गा ज्या ख असेल तर एक लंबकोण त्रिकोण असतो.

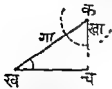
(३) जर खा > गा ज्या ख आणि < गा असून ख न्यून असेल तर दोन त्रिकोण शक्य असतात.

(४) जर ' खा > गा किंवा = गा आणि म्हणून अवश्यमेव > गा ज्या ख असून ख न्यून असेल तर ग न्यून असलेला एक त्रिकोण शक्य असतो.

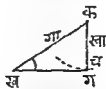
(५) जर ख अधिककोण असेल तर खा > गा असतांनाच एक त्रिकोण शक्य असतो, नाहीतर एकहि त्रिकोण शक्य नसतो.

खा, गा आणि ख यांच्या कांही विवक्षित अर्थां असल्यास त्रिकोण निश्चित करतांना संदेह किंवा संदिग्धता निर्माण होते; म्हणून या प्रकारास त्रिकोण-निर्धारणाचा संदिग्ध प्रकार म्हणतात.

१४-७२ संदिग्ध प्रकाराचा रैखिकीकृत्या विचार.



आकृति १



आकृति २



आकृति ३



आकृति ४

भा. १४.८

खा, गा, ख या दिलेल्या अवयवांचरून त्रिकोण काढ-
ण्याचा प्रयत्न करा. कख = गा घेऊन, ख या दिलेल्या कोणा-
एवढा कखच कोण काढा. ग हा तिसरा बिंदु खच घर असून
क पासून खा इतक्या अंतरावर आहे म्हणून क हे केंद्र आणि
खा ही त्रिज्या घेऊन वृत्त काढा.

खच ला कच लंब काढा.

∴ कच = गा ज्या ख

आता पुढील प्रकार उद्भवतात.

(१) खा < गा ज्या ख अर्थात् < कच असेल तर काढलेले घृत्त खच खा भुलीच छेदीत नाही. म्हणून एकहि त्रिकोण काढता येत नाही. (आकृति १)

(२) खा = गा ज्या ख अर्थात् = कच असेल तर काढलेले घृत्त खच ला च बिंदूंत स्पर्श करतं. म्हणून कखच किंवा कखग हा ग र्शी लंबकोण असलेला एकच त्रिकोण तयार होतो. (आकृति २)

(३) खा > गा ज्या ख अर्थात् > कच, पण < गा असेल तर काढलेले घृत्त खच ला ख ज्या एकाच बाजूस असलेल्या ग, आणि ग, या दोन बिंदूंत छेदते. म्हणून दिलेले अवयव असणारे कखग, व कखगे, हे दोन त्रिकोण तयार होतात. (आकृति ३)

(४) खा > गा म्हणून अवश्यमेव > गा ज्या ख अर्थात् > कच असेल तर काढलेले घृत्त खच ला ख ज्या विरुद्ध बाजूस असलेल्या ग, आणि ग, या दोन बिंदूंत छेदते. आठुर्तीतील कखग, या त्रिकोणातील कखग, हा कोण 180° - ख एवढा आहे आणि म्हणून \triangle कखग, दिलेले प्रतिबंध पाळीत नाही. म्हणून दिलेले अवयव असलेला कखग, हाच तेवढा त्रिकोण आहे.

खा = गा असल्यास ख आणि ग, हे बिंदू संपाती होताना आणि एकच त्रिकोण तयार होतो. (आकृति ४)

ख अधिककोण असतांना योग्य त्या आकृत्या काढल्यास
असे दिसून येईल की खा < गा किंवा खा = गा असते तेव्हा
त्रिकोण शक्य नसतो, परंतु खा > गा असते तेव्हा केवळ
एकच त्रिकोण तयार होतो.

१४.७३ संदिग्ध प्रकाराचा वैजिकीदृष्ट्या विचार,
अनुच्छेद १४ ७ च्या आकृतीवरून,

खा^२ = गा^२ + का^२ - २ गा का कोज्या ख
खा, गा, ख दिले आहेत, तर का काढणे.

घरील संबंध का चा चर्चालाकार समजून पुढीलप्रमाणे
लिहिता येतो.

$$\text{का}^2 - २ \text{ गा कोज्या ख. का} + (\text{गा}^2 - \text{खा}^2) = ०$$

∴ का =

$$\frac{२ \text{ गा कोज्या ख} \pm \sqrt{४ \text{ गा}^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ ख} - ४ (\text{गा}^2 - \text{खा}^2)}}{२}$$

$$\text{किंवा, का} = \text{गा कोज्या ख} \pm \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ ख}}$$

.. (अ)

(१) खा < गा ज्या ख असल्यास $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2 \text{ ख}}$
ही काट्यनिक (imaginary) राशि असते आणि (अ) वरून
का ची एकही वास्तविक सहा मिळत नाही. म्हणून कसम
त्रिकोण शक्य नसतो.

(२) खा = गा ज्या ख असल्यास समीकाराची दोन मूळें
वास्तविक आणि समान असतात, आणि का, गा कोज्या ख

समान होते. म्हणून केवळ एकच लंबकोण त्रिकोण निर्माण होतो.

(३) खा > गा ज्या ख असल्यास का ज्या दोन वास्तविक आणि भिन्न अर्हा असतात. का ही याजू नंद्मीच धन असल्यामुळे त्या दोन्हीहि अर्हा जेव्हा धन असतात तेव्हाच त्या ग्राह्य मानल्या जातात.

आता का ज्या दोन अर्हापेची

गा कोज्या ख + $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2}$ ही धन आहे.

आणि गा कोज्या ख - $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2}$ ख धन होईल, पण त्यासाठी

$\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2} < \text{गा कोज्या ख}$

किंवा $\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2 < \text{गा}^2 \text{ कोज्या}^2 \text{ ख}$

किंवा $\text{खा}^2 < \text{गा}^2 (\text{कोज्या}^2 \text{ ख} + \text{ज्या}^2 \text{ ख})$

किंवा $\text{खा}^2 < \text{गा}^2$

किंवा $\text{खा} < \text{गा}$

असावयास पाहिजे.

म्हणून खा > गा ज्या ख आणि $\text{खा} < \text{गा}$ असते तेव्हाच दोन त्रिकोण निर्माण होतात.

(४) खा > गा असल्यास

गा कोज्या ख - $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \text{ ज्या}^2}$

ही का ची अर्हा ऋण होते आणि म्हणून तत्संबद्ध त्रिकोण

शून्य नसतो. या प्रकारांत का ज्या धन अहेंनुसार केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

खा = गा असल्यास का ची एक अर्हा शून्य असते आणि तत्संबद्ध त्रिकोण शक्य नसतो. या प्रकारांत २ गा कोज्या ख ही का ची दुसरी अर्हा असणारा केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

(५) ख अधिककोण असल्यास गा कोज्या ख ऋण असते, आणि गा कोज्या ख - $\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2}$ या ख ही का ची अर्हा नेहमी ऋण असते च तत्संबद्ध त्रिकोण शक्य नसतो.

थाता, जर

$$\text{गा कोज्या ख} + \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2} > 0$$

$$\text{किंवा } \sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2} > -\text{गा कोज्या ख}$$

$$\text{किंवा } \text{खा}^2 > \text{गा}^2 \text{ कोज्या ख} + \text{गा}^2$$

$$\text{किंवा } \text{खा} > \text{गा}$$

असेल तर का ची दुसरी अर्हा धन होते.

म्हणून ख अधिककोण असतांना, $\text{खा} < \text{गा}$ किंवा $\text{खा} = \text{गा}$ असल्यास त्रिकोण शक्य नसतो. परंतु $\text{खा} > \text{गा}$ असले तर केवळ एकच त्रिकोण शक्य असतो.

१४७४ उदाहरण १. कलम त्रिकोणांत $\text{खा} = ४१$, $\text{गा} = ६०$ च ख = $२८^{\circ} ३०'$ दिले आहेत. तर त्याचे निर्धारण संदिग्ध आहे हे सिद्ध करा आणि चाकीचे कोण काढा.

आता दिलेला कोण ख न्यून आहे. म्हणून निर्धारण संदिग्ध असण्याकरिता

खा > गा ज्या ख च < गा

अर्थात् $४१ > ६०$ ज्या $२८^{\circ}३०'$ च < ६०
असावयास पाहिजे.

आता, प्राकृत ज्या-सा-मीन, ज्या $२८^{\circ}३०' = २७७२$

$\therefore ४१ > ६० \times ०.४८७२$ च < ६०

किंवा $४१ > २८.६३२$ च < ६०

असेल तर त्रिकोणाविषयी संदिग्धता राहील.

परंतु हे सत्य आहे. म्हणून प्रकार संदिग्ध आहे.

$$\begin{aligned} \text{ज्या ग} &= \frac{\text{गा ज्या म्य}}{\text{खा}} \\ &= \frac{६० \times \text{ज्या } २८^{\circ}३०'}{४१} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{जे ज्या ग} &= \text{जे } ६० + \text{जे ज्या } २८^{\circ}३०' - \text{जे } ४१ \\ &= १.७७८२ + १.६७८७ - १.६१२८ \\ &= १.८४४१ \\ &= \text{जे ज्या } ४४^{\circ}१८' \end{aligned}$$

$\therefore \text{ग} = ४४^{\circ}१८'$ किंवा $१८०^{\circ} - ४४^{\circ}१८'$
म्हणून, १४.७२ या अनुच्छेदाच्या आरुति ३ करून,

$$ग_1 = ४४^{\circ}१८'$$

$$ग_2 = १३५^{\circ}४२'$$

ग च्या दोन अर्द्यानुसार, क च्या

$$क_1 = \angle खकग_1 = १८०^{\circ} - २८^{\circ}३०' - ४४^{\circ}१८' = १०७^{\circ}१२'$$

आणि

$$क_2 = \angle खकग_2 = १८०^{\circ} - २८^{\circ}३०' - १३५^{\circ}४२' = १५^{\circ}४८' या$$

दोन अर्द्या मिळतात.

उदाहरण २. खा, गा, ख दिलेले असून संदिग्ध प्रकारांत

का_१, का_२ या तिसऱ्या बाजूच्या अर्द्या असतील तर

$$(१) का_1 + का_2 = २गा कोज्या ख$$

$$(२) कोज्या \frac{क_1 - क_2}{२} = \frac{गा}{खा} ज्या ख$$

[अलाहाबाद १९३१]

है सिद्ध करा.

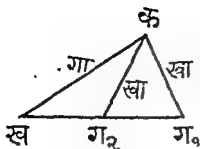
$$आता, कोज्या ख = \frac{गा^२ + का^२ - खा^२}{२गाका} \quad \text{या}$$

सूत्रावरून

$$का^२ - २गा कोज्या ख \times का + (गा^२ - खा^२) = ०$$

या समीकाराची वा, व का_२ ही मूळे आहेत; म्हणून वर्गसमीकाराच्या सिद्धांतानुसार (theory),

$$का_1 + का_2 = २गा कोज्या ख \quad \dots \dots \dots (१)$$



आता,

$$क_१ + ख + ग_१ = १८०^\circ$$

आणि

$$क_२ + ख + ग_२ = १८०^\circ$$

आ. १४.९

∴ या दोन समीकारांचा योग करून,

$$(क_१ + क_२) + २ख + (ग_१ + ग_२) = ३६०^\circ$$

पण ग_१, ग_२ प्राजुपूरक कोण असल्यामुळे ग_१ + ग_२ = १८०°

$$\therefore क_१ + क_२ = १८०^\circ - २ख$$

$$\text{किंवा } \frac{क_१ + क_२}{२} = ९०^\circ - ख \quad \dots\dots(घ)$$

$$\text{कखग}_१ \text{ त्रिकोणांत, } \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{का_१}{ज्या क_१}$$

$$\text{कखग}_२ \text{ त्रिकोणांत, } \frac{खा}{ज्या ख} = \frac{का_२}{ज्या क_२}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{खा}{ज्या ख} &= \frac{का_१}{ज्या क_१} = \frac{का_२}{ज्या क_२} = \frac{का_१ + का_२}{ज्या क_१ + ज्या क_२} \\ &= \frac{२ गा कोज्या ख}{२ ज्या \frac{क_१ + क_२}{२} कोज्या \frac{क_१ - क_२}{२}} \end{aligned}$$

(१) वरून

$$= \frac{\text{गा कोज्या ख}}{\text{ज्या } (२०^{\circ} - \text{ख}) \text{ कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2}}$$

(अ) वरून

$$= \frac{\text{गा कोज्या ख}}{\text{कोज्या ख कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2}}$$

$$= \frac{\text{गा}}{\text{कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{\text{क}_1 - \text{क}_2}{2} = \frac{\text{गा ज्या ख}}{\text{खा}}$$

उदाहरणसंग्रह २३

(१) पुढील अवयव दिले आहेत:—

(१) खा = २५, गा = १६, ख = ११५°३१'

(२) खा = २२, गा = २२, ख = ३०°४२'

(३) खा = ७, गा = ७, ख = १२०°

(४) खा = ४√२, गा = ८, ख = ४१°

यांतून, ज्यांत (अ) एक त्रिकोण असतो, किंवा (आ) दोन त्रिकोण असतात, किंवा (इ) एकही त्रिकोण नसतो असे प्रकार वेचून काढा. शिवाय शक्य असेल तेव्हा त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

(२) गा = ४७.२३ , का = ५६.५५ , ग = $४८^{\circ}३७'$ दिले आहेत. तर कलंग त्रिकोण संदिग्ध आहे हे सिद्ध करा आणि सारण्यांच्या साहाय्याने त्याचे निर्धारण करा.

[नागपूर १९४२]

(३) खालीलपैकी संदिग्ध प्रकार घेवून काढा व त्याबद्दल पारणे या आणि तत्संबद्ध त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

(१) क = ३०° , गा = २५० पाद, का = १२५ पाद

(२) क = ३०° , गा = २५० पाद, का = २०० पाद

[पाटणा १९४२]

(४) एका त्रिकोणाचा एक कोन $११२^{\circ}४'$ असून त्यासमोरीक याजू ५७३ पाद आहे आणि दुसरी एक याजू ३९४ पाद आहे. तर याकरीचे कोन काढा.

[अलाहाबाद १९३९]

(५) का = २ , क = $\sqrt{३+१}$, ग = ४१° असल्यास कलंग त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

[मैसूर १९४३]

(६) का = ३६० , रा = २८५ , क = ३४° असल्यास कलंग त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

[ब्रावणकोर १९४३]

(७) कलंग त्रिकोणाच्या संदिग्ध प्रकारांत खा, गा आणि ख दिले असल्यास का च्या दोन अर्धामधील फरक $२\sqrt{\text{खा}^2 - \text{गा}^2 \sin^2 \text{ख}}$ आहे हे सिद्ध करा.

(८) कवग त्रिकोणांत खा, गा, ख दिले असतांना, त्याच्या संदिग्ध प्रकारांत का_१, का_२ या तिसऱ्या याजूच्या अर्हा असून का_१ > का_२ असल्यास सिद्ध करा की

(१) का_१ - का_२ = २ खा कोज्या ग [यनारस १९२८

(२) (का_१ - का_२)^२ + (का_१ + का_२)^२ स्प^२ख = ४खा^२

(३) का_१^२ + का_२^२ - २ का_१का_२ कोज्या २ख

= ४खा^२ कोज्या^२ ख

[यनारस १९३५

१४.८ आता आपण १४.३ अनुच्छेदाच्या शेवटी उल्लेखिलेल्या तीन कोणांच्या प्रकाराविषयी विचार करू.

केवळ क, ख, ग हे त्रिकोणाचे तीन कोण दिलेले

असतात, तेव्हा $\frac{\text{का}}{\text{ज्या क}} = \frac{\text{खा}}{\text{ज्या ख}} = \frac{\text{गा}}{\text{ज्या ग}}$ या सूत्रावरून

त्याच्या चाजूंचे परस्परांत असलेले प्रमाण काढता येते, पण चाजूंच्या प्रत्यक्ष लांबी काढता येत नसल्यामुळे त्रिकोणाचे निर्धारण करता येत नाही. अशा प्रकारांत, दिलेले तीन कोण असणारे त्रिकोण असंख्य असून ते सर्व समरूप असतात.

१४.९ इतर न्यासावरून (data) त्रिकोणांचे निर्धारण.

त्रिकोणाच्या चाजू आणि कोण यांच्यापेवजी इतर न्यास दिलेला असल्यास कधीकधी त्याचे निर्धारण करता येते. खालील उदाहरणांवरून अशा वेळी उपयोगांत आणलेली निर्धारणाची रीत दिसून येईल.

उदाहरण १. गा, का + खा, आणि ग दिले असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

$$\text{आता } \frac{\text{का} + \text{खा}}{\text{गा}} = \frac{\text{ज्या क} + \text{ज्या ख}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२\text{ज्या } \frac{\text{क} + \text{ख}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}}{\text{ज्या ग}}$$

$$= \frac{२\text{कोज्या } \frac{\text{ग}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}}{२\text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२} \text{ कोज्या } \frac{\text{ग}}{२}}$$

$$= \frac{\text{कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{२}}{\text{ज्या } \frac{\text{ग}}{२}}$$

$$\therefore \text{कोज्या } \frac{\text{क} - \text{ख}}{२} = \frac{\text{का} + \text{खा}}{\text{गा}} \text{ ज्या } \frac{\text{ग}}{२}$$

या संबंधावरून $\frac{\text{क} - \text{ख}}{२}$ माहीत होतो.

आणि $\frac{\text{क} + \text{ख}}{२} = ९०^\circ - \frac{\text{ग}}{२}$ वरून $\frac{\text{क} + \text{ख}}{२}$ माहीत होतो.

म्हणून क आणि ख हे कोण काढता येतात.

आता क आणि ख हे कोण माहीत झाले आहेत आणि वाजू गा दिलेली आहे. म्हणून या उदाहरणाला प्रकार ३ चे रूप येते

उदाहरण २. शिरोबिंदूपासून समोरील वाजूंवर काढलेले लंब दिले आहेत, तर त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

क, ख, ग या शिरोबिंदूपासून समोरील वाजूंवर काढलेल्या लंबांच्या लांबी अनुक्रमे ल_१, ल_२, ल_३ आहेत असे समजा.

$$\therefore \text{का ल}_1 = \text{खा ल}_2 = \text{गा ल}_3 = 2\Delta$$

$$\therefore \frac{\text{का}}{\text{ल}_1} = \frac{\text{खा}}{\text{ल}_2} = \frac{\text{गा}}{\text{ल}_3}$$

तीन वाजूंचे प्रमाण माहीत होतांच हे उदाहरण प्रकार १ च्या रुपांत येते आणि तो प्रकार निर्धारण्याची रीत येथे लागू पडते.

उदाहरणसंग्रह २४

- (१) एका त्रिकोणाचे कोण समांतर धेडीत असून त्याचा लघुत्तम कोण 30° चा आहे. तर त्याची महत्तम वाजू लघुत्तम वाजूच्या दुप्पट आहे हे दाखवा.
- (२) एका त्रिकोणाचे कोण $1:4:5$ या प्रमाणांत असल्यास त्याच्या वाजू $\sqrt{3}-1: \sqrt{3}+1:2\sqrt{2}$ या प्रमाणांत आहेत हे सिद्ध करा.
- (३) कसले त्रिकोणांत कोज्या क $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ व कोज्या ग $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ असल्यास का : खा : गा हे प्रमाण काढा.

(४) एका त्रिकोणाचे कोण समांतर धेर्दीत आहेत आणि त्याच्या महत्तम व लघुत्तम बाजूंच्या लांबी अनुक्रमे २४ व १६ आहेत. तर त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

[पाटणा १९३९]

(५) एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू ६५ व २५ आहेत आणि त्यांच्या समोरच्या कोणांमधील फरक 60° आहे. तर सर्व कोण काढा.

[भलाहावाड १९४२]

कसग त्रिकोणांत,

(६) $(का + खा + गा) (खा + गा - का) = खागा$ असेल तर क काढा.

(७) $ग = 60^\circ$, $का - खा = १$, $काखा = २०$ असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

(८) $का = ३२$ पाद, $खा + गा = १०६$ पाद व $\angle ग = १३२^\circ ३४'$ असल्यास त्रिकोणाचे निर्धारण करा.

[नागपूर १९४४]

$$[सूचना - \frac{खा + गा - का}{खा + गा + का} = \frac{\sin \frac{ग}{२}}{\sin \frac{ग}{२}} \text{ वापरा.}]$$

(९) $का = ८७$ पाद, $गा - खा = १९$ पाद, $\angle ख = ५७$ दिले असल्यास कोण क व बाजू खा काढा.

[नागपूर १९४०]

$$[सूचना - (का - खा + गा) \sin \frac{ख}{२} = (का + खा - गा) \sin \frac{ग}{२} \text{ वापरा.}]$$

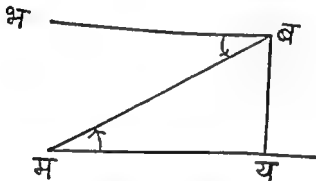
(१०) $\alpha = 62^\circ$, $\beta = 43^\circ$ असून त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ ५३०
 वर्ग एकक (units) आहे. तर त्रिकोणाच्या बाजू काढा.
 [नागपूर १९४५]

[सूचना — $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$ का^२ ज्या ख ज्या ग व्युज्या क
 वापरा.]

प्रकरण पंधरावे

उंची आणि अंतर

१०१ परिभाषा— म आणि व हे दोन बिंदू असून



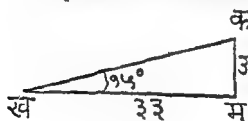
आ. १५०१

य म पेक्षा उच्च पातळीवर (level) आहे. म तून काढलेली क्षैतिज (horizontal) रेषा व मधून काढलेल्या उदग्र (vertical) रेषेस य बिंदूंत मिळते. यम मय ला समांतर काढली आहे. म शी डोळा ठेवून व कडे पाहिले असता होणाऱ्या यमच कोणाला य चा म शी झालेला उन्नतिकोण (angle of elevation) म्हणतात, आणि व शी डोळा ठेवून यम दिशेने पाहिले असता होणाऱ्या मयम कोणाला म चा व शी झालेला अवनातिकोण (angle of depression) म्हणतात.

१५२ बिंदू किंवा इतर वस्तूंमधील (objects) अंतर किंवा मनोरे, स्तूप इत्यादींच्या उंची, त्याच्याविषयी अवनति, उन्नति किंवा इतर आवश्यक कोण दिले असल्यास त्रिकोण-मितीच्या माध्याने काढता येतात. अवनति किंवा उन्नति कोणासारखे आवश्यक कोण नोजण्यासाठी पट्टक (sextant) आणि त्रिकोणमान (theodolite) या यंत्रांचा उपयोग करतात.

१५३ आता आपण वस्तूंच्या उंची आणि त्यामधील अंतर यासंबंधी काही उदाहरणे सोडवू.

उदाहरण १. एका क्षैतिज समतलावर एक खाव उभा आहे. त्याच्या पायथ्यापासून ३३ यष्टी अंतरावर असलेल्या बिंदूशी त्याच्या शिखराचा उन्नतिकोण 15° आहे असे आढळून येते. तर त्या खांबाची उंची काढा.



आ १५२

क समजा मक हा खांब असून त्याची उंची उ यष्टी आहे. क्षैतिज समतलावर खांबाच्या म या पायथ्यापासून ३३ यष्टी अंतरावर ख बिंदू आहे

फल जोडा. मम मकम त्रिकोणांत,

$$\angle मखम = 15^\circ$$

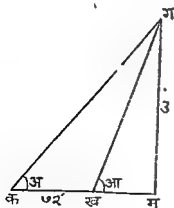
$$\text{आणि } \frac{उ}{३३} = \text{रूप } 15^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

∴ $z = (2 - \sqrt{3}) \approx 33$ यष्टी.

उदाहरण २. एका विवक्षित जागी एका टेकडीच्या माथ्याच्या उन्नतिकोणाची कोटिस्पर्शज्या $\frac{9}{2}$ आहे. टेकडीकडे सरळ ७२ पाद चालून गेल्यावर त्याच्या उन्नतिकोणाची कोटिस्पर्शज्या $\frac{1}{3}$ होते. तर टेकडीची उंची काढा.



आ. १५-३

समजा भग ही टेकडी असून तिची उंची ३ पाद आहे. क्षैतिज समतलावर क विंदूशी ग या माथ्याचा उन्नतिकोण अ आहे.

$$\therefore \text{कोरप अ} = \frac{9}{2}$$

कम दिशेने वल्ल हें ७२ पाद अंतर चालून गेल्यावर ल शी आ लक्षितिकोण होतो.

$$\therefore \text{कोण आ} = \frac{१}{३}$$

कमग त्रिकोणांत,

$$\frac{७}{९} = \text{कोण अ} = \frac{\text{कम}}{उ}$$

$$\therefore \text{कम} = \frac{७उ}{९}$$

लमग त्रिकोणांत,

$$\frac{१}{३} = \text{कोण आ} = \frac{\text{लम}}{उ}$$

$$\therefore \text{लम} = \frac{उ}{३}$$

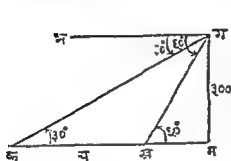
$$\text{आता कल} = \text{कम} - \text{लम}$$

$$\text{पण कल} = ७२ \text{ पाद}$$

$$\begin{aligned} \therefore ७२ &= \frac{७उ}{९} - \frac{उ}{३} \\ &= \frac{४उ}{९} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{किंवा } उ &= १८ \times ९ \\ &= १६२ \text{ पाद.} \end{aligned}$$

उदाहरण ३. एका सुळक्याचें शिखर समुद्रपातळीपानून ३०० पाद उंचीवर आहे. शिखरावरील निरीक्षकास समुद्रांत नांगरलेल्या दोन जहाजांचे अवनतिकोण अनुक्रमे ३०° व ६०° आहेत असं आढळून येतं. त्यांना जोडणारी रेषा सुळक्याच्या तळाशीं मिळत असल्यास जहाजांमधील अंतर काढा.



समजा, मग हा सुळका असून म त्याचें तळ आणि ग शिखर आहे. क आणि ख हीं जहाजां असून क, ख, म एकाच सरळ रेषेत आहेत. गम मकलासमांतरकाढा.

आ. १५-४

पक्षाचरून (data),

$$\angle \text{भगक} = 30^\circ$$

$$\angle \text{भगख} = 60^\circ$$

आणि मग = ३०० पाद.

$$\therefore \angle \text{गखक} = 30^\circ$$

$$\text{व } \angle \text{गखम} = 60^\circ$$

समजा इष्ट अंतर कख = y पाद.

मग या लंबकोणत्रिकोणांत,

$$\frac{\text{मग}}{\text{कग}} = \text{ज्या} 30^\circ$$

$$\text{किंवा } \frac{३००}{\text{कग}} = \frac{१}{२}$$

$$\therefore \text{कग} = ६०० \text{ पाद.}$$

कखग त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{कख}}{\text{ज्या कगख}} = \frac{\text{कग}}{\text{ज्या कखग}}$$

$$\therefore \frac{\text{य}}{\text{ज्या}(६०^\circ)} = \frac{६००}{\text{ज्या}(९०^\circ - ६०^\circ)}$$

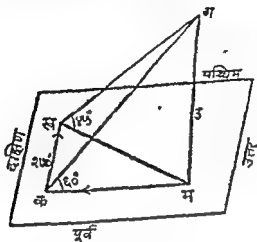
$$\text{किंवा य} = \frac{६०० \times \frac{१}{२}}{\frac{\sqrt{३}}{२}} \text{ पाद}$$

$$= \frac{६००}{\sqrt{३}} \text{ पाद}$$

$$= २००\sqrt{३} \text{ पाद}$$

उदाहरण ४. एका वुरुजाचा उग्रतिकोण त्याच्या दक्षिणे-
कडील क या एका बिंदूशी ६०° व्याप्ते क च्या पश्चिमेस
असलेल्या ख या बिंदूशी ४५° आहे. कख हें अंतर २७०
पाद असल्यास वुरुजाची उंची काढा.

समजा मग हा घुबूज आहे. म र्था दक्षिणेकडील क बिंदु हें पाहिले निरीक्षणाचें स्थान आहे.



आ १५५

• $\angle मकग = ६०^\circ$

ख बिंदु क र्था पश्चिमस २७० पाद अंतरावर आहे, य ते निरीक्षणाचें दुसरें स्थान आहे.

• $\angle मखग = ४१^\circ$

समजा घुबूजाची उंची उ पाद आहे.

मकग त्रिकोणांत,

$$\frac{मग}{मक} = \text{एव } ६०^\circ = \sqrt{३}$$

$$\therefore \text{मक} = \frac{\text{मग}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{उ}}{\sqrt{3}}$$

मखल त्रिकोणांत,

$$\frac{\text{मग}}{\text{मख}} = \text{स्प } 60^\circ = 1$$

$$\therefore \text{मग} = \text{मख} = \text{उ}$$

मकल त्रिकोणांत,

$$\angle \text{मकल} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{कल}^2 + \text{मक}^2 = \text{मख}^2$$

$$\text{किंवा } (200)^2 + \frac{\text{उ}^2}{3} = \text{उ}^2$$

$$\therefore \frac{2}{3} \text{उ}^2 = (200)^2$$

$$\begin{aligned} \text{किंवा } \text{उ} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 200 \\ &= 231 \sqrt{6} \text{ पाद.} \end{aligned}$$

उदाहरणसंग्रह २५ :

- (१) शेतांतील एका ताडाच्या झाडापासून ३७ पाद अंतरावरील बिंदूशी झाडाच्या शेंड्याचा उन्नतिकोण 60° आहे; तर झाडाची उंची काढा.

(२) $4\frac{1}{2}$ पाद उंचीचा मनुष्य एका दिव्याच्या खांब्यापासून ७ पाद अंतरावर उभा असतांना त्याची सावली १७ पाद लांब पडते. तर दिव्याच्या खांब्याची उंची किती आहे ?

(३) ८० पाद उंचीच्या खांब्याला एक १६ पाद उंच असलेली झेव्याची काठी अडकवली आहे; तर जमिनीवर खांब्याच्या तळापासून ३२ पाद अंतरावर असलेल्या एका विंदूशी काठीन आपातित केलेला कोण काढा.

(४) एका इसमास एका पर्वतशिखराचा उन्नतिकोण 15° आहे असें आढळून येते. सपाट जमिनीवरून पर्वताकडे सरळ १ कोशक अंतर चालून गेल्यावर उन्नतिकोण 60° होतो; तर पर्वताची उंची काढा.

(५) ६० पाद उंची असलेल्या एका घुर्जाच्या माथ्याचे दुसऱ्या घुर्जाच्या माथ्यावरून घ तळापासून मोजलेले अवनतिकोण घ उन्नतिकोण अनुक्रमे 45° व 20° आहेत. तर दुसऱ्या घुर्जाची उंची काढा.

(६) एका पर्वताच्या पायथ्याशी त्याच्या शिखराचा उन्नतिकोण 45° आहे. 30° च्या चढाव्याने १ कोशक अंतर पर्वतावर चालून गेल्यानंतर उन्नतिकोण 60° होतो; तर पर्वताची उंची काढा. [नागपूर १९४४]

(७) एका समभुजत्रिकोणाकार शेताच्या मध्यभागी क पाद उंचीचा स्तंभ उभा आहे. शेताची प्रत्येक बाजू

स्तंभाच्या शेंड्याशी २ अ हा कोण आपातित करते;
तर शेताचे क्षेत्रफळ

$$\frac{३ \sqrt{३} क^२ ज्या^२ अ}{३ - ४ ज्या^२ अ} \text{ वर्ग पाद आहे हें दाखवा.}$$

[नागपूर १९४०]

- (८) • एका सरोवरापासून २०० पाद उंचीवर असलेल्या विंदूशी एका विमानाचा उन्नतिकोण ४५° आहे, व विमानाच्या प्रतिविंबाचा अवनतिकोण ७५° आहे; तर सरोवराच्या पृष्ठभागापासून विमान किती उंचीवर आहे तें काढा.

[यनारस १९४३]

- (९) एका नदीच्या तीरावर २०० पाद उंचीचा एक स्तंभ असून त्यावर एक ३० पाद उंच पुतळा आहे. स्तंभाच्या पायथ्याशी उभा राहिलेला ६ पाद उंचीचा मनुष्य समोरील तीरावरच्या निरीक्षकाच्या डोळ्याशी (डोळा जमिनीसपाट ठेवला असतांना) जितका कोण थापातित करील तितकाच कोण तो पुतळा आपातित करतो; तर नदीची रुंदी काढा.

[यनारस १९४१]

- (१०) एका घुस्जाच्या पूर्वेकडील क या ठिकाणाशी घुस्जाचा उन्नतिकोण अ आहे, आणि क च्या उत्तरेस असलेल्या ख या ठिकाणाशी उन्नतिकोण आ आहे;

तर घुमटाची उंची $\frac{\text{कख ज्या अ ज्या आ}}{\sqrt{\text{ज्या (अ+आ) ज्या (अ-आ)}}}$
 आहे हें दाखया. [चनारस १९४०]

(११) एका घुमटाच्या दक्षिणेकडील एका बिंदूशी घुमटाचा उन्नतिकोण ४५° आहे व या बिंदूच्या पश्चिमेस असलेल्या दुसऱ्या एका बिंदूशी उन्नतिकोण ३०° आहे. दोन बिंदूंमधील अंतर व असल्यास घुमटाची उंची काढा. [पाटणा १९४४]

(१२) एका सरोवराच्या पृष्ठभागापासून घ उंचीवर असलेल्या एका बिंदूशी एका ढगाच्या उन्नतिकोण अ आहे व त्याच बिंदूशी ढगाच्या सरोवरांतील प्रतिबिंबाचा अवनतिकोण आ आहे. तर सरोवरापासून ढगाची उंची $\frac{\text{घ ज्या (आ+अ)}}{\text{ज्या (आ-अ)}}$ आहे हें सिद्ध करा.
 (ढग सरोवराच्या पृष्ठभागापासून जितका वर आहे तितकेंच त्याचें प्रतिबिंब पृष्ठभागाच्या खाली आहे हे गृहीत घरा.) [भलाहावाद १९४२]

प्रकरण सोळावें

प्रतीप चतुल श्रितें

१६.१ ज्या अ = $\frac{१}{२}$ या समीकाराचें समाधान ३०° , १२०° , ३९०° , ४८०° , ... या शेढींतील कोण करतात. ज्याची ज्या, $\frac{१}{२}$ आहे असा घन वा ऋण अल्पष्ट कोण दर्शविण्यासाठी 'ज्या^{-१} $\frac{१}{२}$ ' हें व्यंजक वापरतात.

वाचरून ज्या^{-१} $\frac{१}{२} = ३०^{\circ}$ असें लिहितां येईल.

सामान्यतः जर ज्या अ = क असेल तर ज्या^{-१}क, क ही ज्या असणारा अल्पष्ट संख्यात्मक कोण दर्शविते. ज्या^{-१}क हें व्यंजक 'ज्या वियुत (minus) एक क' किंवा 'ज्या प्रतीप (inverse) क' असें वाचतात. ज्या^{-१}क हा कोण आहे, तर (ज्या क)^{-१} हें $\frac{१}{\text{ज्या क}}$ समान आहे हें लक्षांत ठेवायें, आणि ज्या^{-१}क व (ज्या क)^{-१} या दोन व्यंजकांविषयी घोटाळा उत्पन्न होऊं देऊं नये.

तसैच कोज्या^{-१}क, क ही कोटिज्या असणारा अल्पिष्ठ
 घन वा क्रण कोण दर्शविते. त्याचप्रमाणे स्प^{-१}क, फोस्प^{-१}क,
 व्युत्कोज्या^{-१}क आणि द्युज्ज्या^{-१}क यांच्या परिभाषा देतां
 येतात.

ज्या^{-१} क, कोज्या^{-१}क, स्प^{-१}क,..... या राशींना
 'प्रतीप घतुल श्रितें' म्हणतात.

१६.२ जर ज्या अ = क, तर ज्या^{-१}क = अ.

(परिभाषेवरून)

∴ ज्या (ज्या^{-१}क) = ज्या अ = क

म्हणजे कोणत्याहि राशीच्या प्रतीप उदे ची ज्या
 घेतल्यास आपणांस ती राशि परत मिळते.

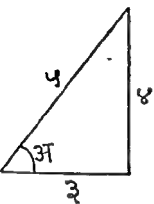
तसैच,

कोज्या (कोज्या^{-१}क) = क

स्प (स्प^{-१}क) = क इत्यादि.

१६.३ उदाहरण १. सिद्ध करा —

$$\text{ज्या}^{-१} \frac{४}{५} + \text{कोज्या}^{-१} \frac{१२}{१३} = \text{स्प}^{-१} \frac{६३}{१६}$$

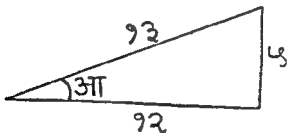


आ १६१

$$\text{समजा ज्या}^{-1} \frac{4}{5} = \text{अ}$$

$$\therefore \text{ज्या अ} = \frac{4}{5}$$

$$\text{व रूप अ} = \frac{4}{3}$$



आ. १६०२

$$\text{समजा कोज्या}^{-1} \frac{12}{13} = \text{आ}$$

३२७

$$\therefore \text{कोज्या आ} = \frac{१२}{१३}$$

$$\therefore \text{च स्प आ} = \frac{५}{१२}$$

$$\text{समजा स्प}^{-१} \frac{६३}{१६} = इ$$

$$\therefore \text{स्प इ} = \frac{६३}{१६}$$

आता आपणांस

$$अ + आ = इ$$

$$\text{किंवा स्प (अ + आ)} = \text{स्प इ}$$

हे सिद्ध करावयाचे आहे.

$$\text{स्प (अ + आ)} = \frac{\text{स्प अ} + \text{स्प आ}}{१ - \text{स्प अ स्प आ}}$$

$$= \frac{\frac{४}{३} + \frac{५}{१२}}{१ - \frac{४}{३} \cdot \frac{५}{१२}}$$

$$= \frac{48 + 14}{36 - 20} = \frac{62}{16}$$

$$= \text{स्प ६}$$

यावरून इष्ट संबंध सिद्ध होतो.

उदाहरण २. सिद्ध करा. —

$$२ \text{ स्प}^{-१} \frac{२}{५} + \text{स्प}^{-१} \frac{२१}{२०} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

$$\text{समजा } \text{स्प}^{-१} \frac{२}{५} = \text{अ}$$

$$\text{म्हणून स्प अ} = \frac{२}{५}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{स्प} \left(\frac{\text{प्या}}{२} - २ \text{ स्प}^{-१} \frac{२}{५} \right) &= \text{स्प} \left(\frac{\text{प्या}}{२} - २ \text{ अ} \right) \\ &= \text{कोस्प २ अ} \\ &= \frac{१ - \text{स्प}^२ \text{ अ}}{२ \text{ स्प अ}} \\ &= \frac{१ - \frac{४}{२५}}{\frac{२}{२५}} \\ &= \frac{२१}{२०} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\text{प्या}}{2} - 2 \text{ स्प}^{-1} \frac{2}{5} = \text{स्प}^{-1} \frac{21}{20}$$

$$\text{किंवा } 2 \text{ स्प}^{-1} \frac{2}{5} + \text{स्प}^{-1} \frac{21}{20} = \frac{\text{प्या}}{2}$$

उदाहरण ३. सिद्ध करा —

$$\text{कोज्या}^{-1} \text{ य} = \text{कोज्या}^{-1} \text{ र}$$

$$= \text{कोज्या}^{-1} \left\{ \text{यर} + \sqrt{(1-\text{य}^2)(1-\text{र}^2)} \right\}$$

$$\text{समजा कोज्या}^{-1} \text{ य} = \text{अ}$$

$$\text{म्हणून कोज्या अ} = \text{य},$$

$$\text{ज्या अ} = \sqrt{1-\text{य}^2}$$

$$\text{समजा कोज्या}^{-1} \text{ र} = \text{आ}$$

$$\text{म्हणून कोज्या आ} = \text{र},$$

$$\text{ज्या आ} = \sqrt{1-\text{र}^2}$$

$$\text{आता, कोज्या (अ-आ)} = \text{कोज्या अ कोज्या आ}$$

$$+ \text{ज्या अ ज्या आ}$$

$$= \text{यर} + \sqrt{(1-\text{य}^2)(1-\text{र}^2)}$$

$$\text{किंवा अ-आ} = \text{कोज्या}^{-1} \left\{ \text{यर} + \sqrt{(1-\text{य}^2)(1-\text{र}^2)} \right\}$$

अ आणि आ चें आदेश करून

कोज्या^{-१} य - कोज्या^{-१} र

$$= \text{कोज्या}^{-१} \left\{ \text{यर} + \sqrt{(१-य^२)(१-र^२)} \right\}$$

उदाहरणसंग्रह २६

सिद्ध करा —

$$(१) \text{ ज्या}^{-१} \frac{१}{\sqrt{५}} - \text{स्प}^{-१} \frac{१}{३} = \text{कोस्प}^{-१} ७$$

$$(२) \text{ ज्या}^{-१} \frac{३}{५} - \text{कोज्या}^{-१} \frac{१२}{१३} = \text{ज्या}^{-१} \frac{१६}{६५}$$

[यनारस १९४३]

$$(३) \text{ ज्या}^{-१} \frac{४}{५} + \text{ज्या}^{-१} \frac{५}{१३} + \text{ज्या}^{-१} \frac{१६}{६५} = \frac{\text{प्या}}{२}$$

[कलकत्ता १९४१]

$$(४) \text{ स्प}^{-१} ४ - \text{स्प}^{-१} \frac{१}{४} = \text{स्प}^{-१} \frac{१५}{८}$$

$$(५) ४(\text{कोस्प}^{-१} ३ + \text{व्युज्या}^{-१} \sqrt{१}) = \text{प्या}$$

[कलकत्ता १९३९]

$$(६) २\text{स्प}^{-१} \frac{१}{३} + \text{स्प}^{-१} \frac{१}{७} = \frac{\text{प्या}}{४}$$

[यनारस १९४१]

$$(7) \text{ ज्या}^{-1} (\text{कोज्या } y) + \text{कोज्या}^{-1} (\text{ज्या } y) = \text{प्या} - 2y$$

$$(8) \text{ ज्या}^{-1} y + \text{कोज्या}^{-1} y = \frac{\text{प्या}}{2} \quad [\text{चनारस १९४५}]$$

$$(9) \text{ कोस्प}^{-1} y - \text{कोस्प}^{-1} r = \text{कोस्प}^{-1} \left(\frac{yr+1}{r-y} \right)$$

$$(10) \text{ ज्या}^{-1} y + \text{ज्या}^{-1} r = \text{ज्या}^{-1} \left\{ y \sqrt{1-r^2} + r \sqrt{1-y^2} \right\}$$

$$(11) 2 \text{ स्प}^{-1} y = \text{ज्या}^{-1} \frac{2y}{1+y^2}$$

$$(12) \text{ स्प}^{-1} \sqrt{y} = \frac{1}{2} \text{ कोज्या}^{-1} \left(\frac{1-y}{1+y} \right) \quad [\text{कलकत्ता १९४३}]$$

$$(13) \text{ ज्या कोस्प}^{-1} \text{ कोज्या स्प}^{-1} y = \sqrt{\frac{y^2+1}{y^2+1}} \quad [\text{चनारस १९४५}]$$

$$(14) \text{ स्प}^{-1} y + \text{स्प}^{-1} r = \frac{\text{प्या}}{2} \text{ मसल्यास}$$

य र = १ दाखवा.

$$(15) (1) \text{ ज्या} \left(\text{ज्या}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{कोज्या}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(२) कोज्या (कोज्या^{-१} क + व्युत्कोज्या^{-१} \frac{१}{क})$$

यांच्या अर्दा काढा.

(१६) य चें कोणतें मान

$$\text{स्प}^{-१} २य + \text{स्प}^{-१} ३य = ४५^{\circ}$$

या समीकाराचें समाधान करतें ? उत्तराचीं कारणें द्या.

[बनारस १९४२]

उत्तरें

उदाहरणें

१. (१) ४५° अ $९७^{\circ}५०''$ (२) १७° अ $२७^{\circ}५०''$
२. (१) $७१^{\circ}२९'३४''-२०८$ (२) $७८^{\circ}२५'१९''-०२$

उदाहरणसंग्रह १

- (१) ११ पाद
(२) ११९.०४७२४ क्षतिमान
(३) १० व ३५
(४) ७२° , ९०° , १०८° , १२६° , १४४° ;

$$\frac{२८५}{५}, \frac{५५}{२}, \frac{३८५}{५}, \frac{७८५}{१०}, \frac{४८५}{५}$$

- (५) (१) १०५° , $११६\frac{२}{३}$, $\frac{७८५}{१२}$

(२) १००° , $१११\frac{१}{२}$, $\frac{५८५}{९}$

$$(३) २२\frac{१}{२}, २५, \frac{८५}{८}$$

(६) ८५९.४३७ पाद

उदाहरणसंग्रह २

$$(२१) \frac{\text{ज्या}^2 \text{अ}}{१ + \text{ज्या अ}} \quad (२२) \frac{१ + \text{व्युत्कोज्या}^2 \text{अ}}{\text{व्युत्कोज्या अ}}$$

उदाहरणसंग्रह ३

(१) जर ज्या अ = य, तर कोज्या अ = $\sqrt{१ - य^२}$

$$\text{स्प अ} = \frac{य}{\sqrt{१ - य^२}}, \text{व्युज्या अ} = \frac{१}{य},$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१ - य^२}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{\sqrt{१ - य^२}}{य}$$

(२) जर स्प अ = य, तर

$$\text{ज्या अ} = \frac{य}{\sqrt{१ + य^२}}, \text{कोज्या अ} = \frac{१}{\sqrt{१ + य^२}},$$

$$\text{व्युज्ज्या अ} = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}, \text{ व्युत्कोज्या अ} = \sqrt{1+y^2}$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{1}{y}$$

(३) जर व्युत्कोज्या अ = य, तर

$$\text{ज्या अ} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}, \text{ कोज्या अ} = \frac{1}{y},$$

$$\text{स्प अ} = \sqrt{y^2-1}, \text{ व्युज्ज्या अ} = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}},$$

$$\text{कोस्प अ} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

(४) ज्या अ = $\frac{1}{\sqrt{1+\text{कोस्प}^2 \text{ अ}}}$,

$$\text{कोज्या अ} = \frac{\text{कोस्प अ}}{\sqrt{1+\text{कोस्प}^2 \text{ अ}}}$$

(५) कोज्या अ = $\frac{\sqrt{\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} - 1}}{\text{व्युज्ज्या अ}},$

$$\text{कोस्प अ} = \sqrt{\text{व्युज्ज्या}^2 \text{ अ} - 1}$$

(६) जर ज्या अ = $\frac{\text{क्ष}(\text{क्ष} + २\text{क्ष})}{\text{क्ष}^2 + २\text{क्षक्ष} + १\text{क्ष}^2}$, तर

$$\text{कोज्या अ} = \frac{२घ (क्ष + घ)}{क्ष^२ + २क्षघ + २घ^२}$$

$$\text{अथ अ} = \frac{क्ष (क्ष + २ घ)}{२ घ (क्ष + घ)}$$

$$\text{व्युज्या अ} = \frac{क्ष^२ + २ क्ष घ + २ घ^२}{क्ष (क्ष + २ घ)}$$

$$\text{व्युत्कोज्या अ} = \frac{क्ष^२ + २ क्ष घ + २ घ^२}{२ घ (क्ष + घ)}$$

$$\text{कोरप अ} = \frac{२ घ (क्ष + घ)}{क्ष (क्ष + २ घ)}$$

$$(७) \pm \left(\frac{य + र}{य - र} \right)$$

$$(८) \frac{१५}{१७}$$

उदाहरणसंग्रह ५

- | | |
|-----------------------|------------------|
| (१) २९९९.६२ | (२) ०००५८१.७७ |
| (३) २०६२६.४८८ | (४) १.००००००४२३१ |
| (५) ०.१७४५३३ | (६) ३४'२३" |
| (७) ६'५२".५३ | (९) ३'५४".३६ |
| (१०) ५.१२ यणी, जचळजचळ | |

उदाहरणसंग्रह ६

- (१) (क) 30° , 150° (का) 84° , 314° (कि) 150° , 330°
 (२) १

उदाहरणसंग्रह ७

- (१) $\text{स प्या} + (-१)\frac{\text{प्या}}{३}$ (२) $२ \text{ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{२}$
 (३) $\text{स प्या} + \frac{३ \text{ प्या}}{४}$ (४) $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{६}$
 (५) $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$ (६) $\text{स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{६}$
 (९) $२ \text{ स प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$ (१०) $\frac{\text{प्या}}{\text{म}-\text{न}}$

उदाहरणसंग्रह ८

- (१) $२ \text{ स प्या} \pm \frac{\text{प्या}}{४}$ किंवा $२ \text{ स प्या} \pm \frac{२ \text{ प्या}}{३}$
 (२) $\text{स प्या} + \frac{\text{प्या}}{४}$, किंवा $\text{स प्या} + ३$ जेथे कोस्य $३ = \frac{१}{२}$
 (३) $२ \text{ स प्या} \pm ३$ किंवा $२ \text{ स प्या} \pm ३$ जेथे कोज्या $३ = \frac{२}{३}$

य कोज्या $३ = -\frac{१}{३}$ या समीकारांचे समाधान कर-
 णान्या ३ आणि ३ अल्पिष्ट घन अर्हा आहेत.

$$(४) २ स प्या \pm \frac{प्या}{२} किंवा स प्या + \frac{प्या}{३}$$

$$(५) \frac{स प्या}{२} किंवा \frac{(२ स + १) प्या}{१०}$$

$$(६) \frac{(४ स + १) प्या}{१२} किंवा \frac{(४ स - १) प्या}{८}$$

$$(७) \frac{स प्या}{२} \pm \sqrt{१ + \frac{स^२ प्या^२}{४}}$$

$$(८) न आणि म कोणतेहि पूर्णांक असल्यास,
इ = (न + म + १) \frac{प्या}{२} व ई = (न - म) \frac{प्या}{२} + \frac{प्या}{३}$$

$$(९) न आणि म कोणतेहि पूर्णांक असल्यास,
य = \frac{१}{१६} \left[(१० म - ६ न) प्या + \frac{३ प्या}{४} \pm \frac{५ प्या}{३} \right]
र = \frac{१}{१६} \left[(१० न - ६ म) प्या + प्या \pm \frac{५ प्या}{४} \right]$$

$$(१०) उवा स = \frac{ख ग \pm क \sqrt{क^२ + ग^२ - न^२}}{क^२ + ग^२}$$

उदाहरणसंग्रह ९

$$(१) \frac{५६}{६५} - \frac{६३}{६५} = \frac{१६}{६५}$$

$$(३) \frac{प्या}{४}$$

उदाहरणसंग्रह १०

(१) $4 + 2\sqrt{6}$

उदाहरणसंग्रह ११

(१)
$$\frac{4xy^2z - 4xy^3z}{1 - 2xy^2z + xy^3z}$$

उदाहरणसंग्रह १२

(१) $\frac{3\sqrt{110}}{110}$ (२) $\frac{n}{m}$

(३) $(1)\sqrt{2} + 1$

उदाहरणसंग्रह १४

(१) 2π क्या किया 2π क्या $+\frac{\pi}{2}$

(२) π क्या $+\frac{(-1)^n\pi}{2}$

(३) $\pi. 360^\circ + 96^\circ 12'$ किया $\pi. 360^\circ - 23^\circ 6'$

(४) 2π क्या किया 2π क्या $+\frac{\pi}{4}$

- (૫) $2s + \frac{2p}{3}$ કિંવા $2s + \frac{p}{3}$
- (૭) $(s + \frac{1}{2}) \frac{p}{3}$ કિંવા $s + \frac{p}{3}$
- (૮) $\frac{s}{2}$ કિંવા $s + (-1)^{s-1} \frac{p}{6}$
- (૯) $s + \frac{p}{2}$ કિંવા $s \pm \frac{p}{2}$
- (૧૦) $s + \frac{p}{8}$ કિંવા $s + 1$, જો $\frac{p}{2} = 1$
- (૧૧) $\frac{s}{2} + (-1)^s \frac{p}{12}$
- (૧૨) s કિંવા $(s - \frac{1}{4}) \frac{p}{2}$
- (૧૩) $2s + \frac{p}{2}$ કિંવા $\frac{1}{4}(2s - \frac{p}{2})$
- (૧૪) $\frac{s}{3}$ કિંવા $\frac{s}{2}$
- (૧૫) $(2s + 1) \frac{p}{8}$ કિંવા $2s \pm \frac{p}{2}$
- (૧૬) $\frac{s}{3}$, કિંવા $s \pm 1$ જો $\frac{p}{2} = 1$
- (૧૭) $s + \frac{p}{8}$ કિંવા $2s \pm \frac{p}{3}$

$$(14) \text{ स प्या क्रिया } \frac{\text{स प्या}}{४} + (-1)^8 \frac{\text{प्या}}{२५}$$

उदाहरणसंग्रह १६

$$(1) \text{ प्र} = २\frac{१}{२}, \text{ प्र} = १, \text{ प्र}_१ = २, \text{ प्र}_२ = ३, \text{ प्र}_३ = ६$$

उदाहरणसंग्रह १७

$$(2) २३ \text{ पाद; } २५\sqrt{३} \text{ घर्ग पाद}$$

उदाहरण

$$(1) २-९९५३ \quad (2) ३-८२३९ \quad (3) १-४०६३$$

उदाहरण

$$(1) १५०१, \quad (2) ७-०८१ \quad (3) २५१२$$

उदाहरणसंग्रह १८

$$(1) (1) १-२३९ (2) २-२८०३ (3) ४-२३७८ (४) १-१८५८६$$

$$(2) २; ०; ५; ०; २$$

$$(3) ०-१४०९; २-१८२$$

$$(४) (1) ३-४३७ (2) ११-२३$$

$$(५) (1) \frac{२८२१}{१०८३}; \frac{५५७६}{१०८१}; २९२२ \times १०^{११}$$

$$(२) १-४१७; १२०-४; ०-४१६१$$

(૭) (૧) ૧૦.૧૮ (૨) ૩૭૭૧ (૩) ૨૪૦૨

(૮) ૨૭૧૦; ૧૦૨૧૪૧; ૨૧૪૨૦

(૯) $\frac{x}{2}$ વ $-\frac{x}{3}$

(૧૦) (૧) $\frac{1}{6}$ (૨) $\frac{1}{8}$ (૩) ૨

(૧૧) (અ) (૧) ૨૨ (૨) ૨૧
(બા) (૧) ૯ વે (૨) ૭ વે

(૧૨) (૧) ૧; $\frac{\text{છે ૨}}{\text{છે ૭}}$ મહળજે ૩૫૬૧.....

(૨) $\frac{૨ (\text{છે ૭} - \text{છે ૩})}{(૬ \text{ છે ૨} - \text{છે ૩} - \text{છે ૭})}$ મહળજે ૨૨૪૧૨.....

(૩) $y = \frac{૨x^2 + ૫x + ૬ - ૬x - ૬}{૬(x + ૬ - ૬)}$,

$$r = \frac{x - ૬}{x + ૬ - ૬},$$

જેથી $૬ = \text{છે ૨}$, $x = \text{છે ૩}$, $૬ = \text{છે ૭}$

(૧૩) ૧.૧૯૪૭૨૬

(૧૪) ૧.૨૩૨૬૩

ઉદાહરણસંગ્રહ ૧૯

(૧) $ક = ૭૦^\circ ૩૧' ૩૦''$, $૪ = ૧૯^\circ ૨૮' ૩૦''$, $ગા = ૯\sqrt{૨}$

(૨) $કા = ૪૦(\sqrt{૬} - \sqrt{૨})$, $ગા = ૪૦(૨ - \sqrt{૩})$

- (३) $\kappa = 60^\circ$, $\chi = 30^\circ$, $\kappa\alpha = (8.3) \sqrt{3}$
 (४) $\kappa\alpha = 6 \sqrt{3}$ पाद; $\kappa\gamma = 6.002$ पाद;
 $\kappa\chi = 3 \sqrt{3}$ पाद; $\gamma\chi = 6.192$ पाद

उदाहरणसंग्रह २०

- (२) $24^\circ 21'$
 (३) $24^\circ 47'$; $86^\circ 33'$; $108^\circ 29'$
 (४) $\kappa = 84^\circ 11' 20''$, $\chi = 44^\circ 28' 40''$, $\gamma = 73^\circ 28'$
 (६) $\kappa = 104^\circ$, $\chi = 14^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
 (७) $\kappa = 84^\circ$, $\chi = 74^\circ$, $\gamma = 60^\circ$
 (८) $\kappa = 37^\circ 29' 12''$, $\chi = 43^\circ 31'$, $\gamma = 61^\circ 42' 48''$

उदाहरणसंग्रह २१

- (१) $\kappa = 63^\circ 39' 40''$, $\chi = 82^\circ 20' 20''$, $\gamma\alpha = 196.9$
 (२) $\kappa = 104^\circ 26' 12''$, $\chi = 14^\circ 26'$
 (३) $\gamma = 117^\circ 36' 44''$, $\kappa = 27^\circ 36' 44''$
 (४) $\kappa = 89^\circ 33' 24''$, $\chi = 36^\circ 48' 14''$
 (५) $\chi = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\kappa\alpha\chi = \sqrt{3}:2$
 (६) $\kappa = 128^\circ 48' 40''$, $\chi = 33^\circ 11' 20''$
 (७) $\chi = 74^\circ 42'$, $\gamma = 46^\circ 41'$
 (८) $\chi = 104^\circ 36' 20''$, $\gamma = 31^\circ 23' 40''$
 (९) $\chi = 98^\circ 42' 40''$, $\gamma = 24^\circ 17' 20''$
 (१०) $\chi = 74^\circ$, $\gamma = 30^\circ$, $\kappa\alpha = \sqrt{6}$

उदाहरणसंग्रह २२

- (१) ला = $२३^{\circ}३५'$, गा = $३१^{\circ}७०'$
 (२) ग = $३५^{\circ}२०'$, ला = $३६^{\circ}४२'$, गा = $२१^{\circ}३५'$
 (३) १७२.६
 (४) ग = $७०^{\circ}३०'$, ला = $१८^{\circ}३६'$, गा = $३७^{\circ}१६'$
 (५) १३.३६

उदाहरणसंग्रह २३

- (१) (१) एक त्रिकोण शक्य आहे.
 ग = $३५^{\circ}२५'$, क = $२९^{\circ}२९'$, का = १३.५८
 (२) दोन त्रिकोण शक्य आहेत.
 ग_१ = $४९^{\circ}५९'$, क_१ = $९९^{\circ}१९'$, का_१ = ४२.५२ ;
 ग_२ = $१३०^{\circ}१'$, क_२ = $१९^{\circ}१७'$, का_२ = १४.२३
 (३) एकहि त्रिकोण शक्य नाही.
 (४) एक लंबकोणत्रिकोण शक्य आहे.
 ग = ९०° , क = ४५° , का = $४\sqrt{२}$
 (२) क_१ = $६३^{\circ}५५'$, ला_१ = $६७^{\circ}२८'$, ला_१ = ५८.१५ ,
 क_२ = $११६^{\circ}५'$, ला_२ = $१५^{\circ}१८'$, ला_२ = १६.६२
 (३) प्रकार (२) संदिग्ध आहे.
 ग_१ = $३८^{\circ}४१'$, ला_१ = $१११^{\circ}१९'$, ला_१ = ३७२.६ पाद;
 ग_२ = $१४१^{\circ}१९'$, ला_२ = $८^{\circ}४१'$, ला_२ = ६०.३९ पाद
 (४) $३९^{\circ}३५'$, $२८^{\circ}२१'$

- (५) $ग_1 = 30^\circ$, $ख_1 = 10'4''$, $गा_1 = \sqrt{2}$,
 $ग_2 = 60^\circ$, $ख_2 = 0'4''$, $गा_2 = \sqrt{6}$
 (६) $ख = 26^\circ 16' 40''$, $ग = 119^\circ 43' 20''$, $गा = 4.42.06$

उदाहरणसंग्रह २४

- (३) $३ : २\sqrt{३} + \sqrt{५} : ४$
 (४) $४0^\circ ५३' ३०''$, ६०° , $७९^\circ ६' ३०''$, $८\sqrt{७}$
 (५) $७' १२'$, $८२^\circ २५'$, $२२^\circ २५'$
 (६) १२०°
 (७) $क = ७०^\circ ५५'$, $ख = ४९^\circ ६'$, $का = ५$, $खा = ४$,
 $गा = \sqrt{२१}$
 (८) $क = २०^\circ ५५' १२''$, $ख = २६^\circ ३०' ४८''$,
 $खा = ४०.००६$ पाद, $गा = ६५.९९५$ पाद
 (९) $क = ४२^\circ ३०' ४०''$, $खा = १०८$ पाद
 (१०) $का = ३८.०५$, $खा = २९.३९$, $गा = ४१.६२$

उदाहरणसंग्रह २५

- (१) $३७\sqrt{३}$ पाद (२) $७\frac{१३}{१७}$ पाद
 (३) $इ$, जेथे $स्पइ = \frac{१}{१७}$ (४) १६७३.७६ पाद
 (५) २२५.२ पाद (६) $\frac{१}{\sqrt{३}-१}$ फोशक

- (८) २०० $\sqrt{३}$ पाद (९) १०७२ पाद
 (११) $\frac{य}{\sqrt{२}}$

उदाहरणसंग्रह २६

- (१५) (१) १ (२) २क^२—१
 (१६) $\frac{१}{६}$

पारिभाषिक शब्दावलि

आंग्ल-मराठी

acute angle न्यून कोण, निकोण	arc चाप
according as तदनुसार	area क्षेत्रफल
addition योग	arithmetic progression सना- तर श्रेढी
addition theorem योगप्रमेय	article अनुच्छेद
adjacent संलग्न	at rest गतिहीन, विश्रामस्थ
admissible प्राप्य	bar शिरोर्दङ्ग
algebra बीजगणित	bisector अर्धक
algebraically बीजीय रीतीने	bounded सीमित
aliter (otherwise) अन्यथा	bounding arc मर्यादा-चाप
alternative वैकल्पिक	bounding line मर्यादा-रेखा
altitude उच्चाय	calculation गणन
ambiguity सन्दिग्धता	case दशा
ambiguous case सन्दिग्ध दशा	centesimal शतविक
angle of depression अवनति- कोण	centimeter शतिमान
angle of elevation उन्नति-कोण	centre केन्द्र
angular points कोणबिन्दु	characteristic लक्षण
anticlockwise प्रतिघटीवृत्	circle वृत्त
antilogarithm प्रतिच्छेद	circular वर्तुल
approximate लगभग, स्थूल रूपाने, उपसादित, उपसन्न (brought near)	circular measure वर्तुल माप
	circumcentre परिकेन्द्र
	circumcircle परिवृत्त

circumradius परित्रिज्या
 circumscribe परिलेखन
 clockwise घड़ीवत्
 coincide (I at co सम् +
 incidere— to fall upon
 पतन) सपतन्
 coincidence सपतन्, सपात
 coincident सपाती
 common साधारण
 common to both उभयसाधारण
 common difference प्रचय
 common system of logari-
 thms सामान्य छेदापद्धति,
 दशछेदापद्धति (base is 10)
 complementary angle सम्प-
 पूर कोण
 concyclic संज्ञतीय
 condition प्रतिबंध
 congruent सबागन्तम
 constant अवल, स्थिरांक
 continuous सतत
 conversely विलोमप्रमाण, विलो-
 मत
 convert परिवर्तन
 corresponding सवादी
 corollary I (to a theorem)
 उपपत्तये
 2 (to a problem) उपनिर्मेय
 3 (to a proposition) उप-
 साध्य

cosecant (cosec) व्युत्क्रमज्या
 (व्युज्ज्या)
 cosine (cos) कोटिज्या (कोज्या)
 cotangent (cot) कोटिस्पर्शज्या,
 कोटिस्पर्ज्या (कोस्प)
 covered sine उत्क्रमकोटिज्या
 (उत्को)
 curve वक्र
 cyclic वृत्तीय, चक्रिय
 data न्यास, पक्ष
 decagon दशकोण, दशभुज
 decimal दशमिक
 definition परिभाषा
 degree अंश
 denominator हर
 diagonal विकर्ण
 diameter व्यास
 disc डिस्क
 division भाजन
 element अवयव
 equation समीकरण
 equilateral समभुजीय
 equilateral triangle समत्रिभुज
 escribe बहिर्लेखन
 escribed बहिर्लिखित
 even सम
 exact यथार्थ
 excentre बहिर्केन्द्र
 encircle बहिर्वृत्त
 expansion विस्तार

express व्यक्त करने
 expression पदसमूह, व्यंजन
 exradius यदिस्त्रिज्या
 exterior angle बहिर्कोण
 external bisector बाह्यभर्जक
 externally बाह्यतः
 final अन्तिम
 finite परिमित
 fixed स्थिर
 foot पाद
 formula सूत्र
 fraction भिन्न
 function धित
 fundamental मूलभूत
 general सामान्य
 geometrical progression गुणोत्तर श्रेणी
 geometry रैखिकी
 given दत्त
 grade अंशक
 graph बिन्दुरेष
 harmonic mean हरात्मक मध्यक
 hexagon षट्कोण, षट्भुज
 horizontal क्षैतिज
 hypotenuse कर्ण
 identical ऐकान्मिक
 identity ऐकान्म्य
 illustrative निदर्शनात्मक
 imaginary काल्पनिक
 incentre अन्तःकेन्द्र

incircle अन्तर्लुप्त
 inclination नति
 included अन्तर्गत
 index of the power घातांक
 inequality असमता
 infinite अनन्त
 infinite series अन्त श्रेणी
 infinitesimal धन्यगु
 infinity अनन्ती
 initial आदि, आदिन
 initial line आदि रसा
 initial position आदिन स्थिति
 inradius अन्तर्त्रिज्या
 inscribe अन्तर्लेखन
 integer पूर्णांक
 integral अणुकल
 internal angle अन्तःकोण
 internal bisector अन्तराधर्जक
 internally अन्तरतः
 intersect मिलनेछेदन, छेदन
 inverse प्रतीप
 involved अन्तर्भूत
 isosceles triangle द्विलम्बत्रिभुज
 latitude अक्षवृत्त
 law नियम
 left hand side वामपक्ष
 length लंबाई, आयाम
 level समतल
 limit सीमा
 logarithm छेदा

magnitude महत्ता
 mantissa (the decimal part
 of common logarithms)
 दशमिकांश
 mean मध्यक
 measure माप
 measurement of angles कोण-
 मापन
 median मध्यगा
 meridian ध्रुवरेख
 mile मील
 minus मिनस
 minute कला
 most general सामान्यतम
 multiple अघट्य
 natural प्राकृत
 negative ऋण
 notation संकेतना
 numerator अंश
 numerical संख्यात्मक
 object वस्तु
 obtuse angle अधिकोण
 octagon अष्टकोण, अष्टभुज
 odd अयुग्म
 opposite विरुद्ध, विपरीत, सम्मुख
 origin मूलबिन्दु
 orthocentre लम्बकोन्द्र
 otherwise अन्यथा
 parallel समान्तर
 partly अंशतः
 pedal triangle पदिक त्रिभुज

pentagon पंचकोण, पंचभुज
 perimeter परिमाप
 period आवर्तकाल
 periodic आवर्तीय
 perpendicular लम्ब
 plane समतल
 point of contact संस्पर्श बिन्दु
 polygon बहुभुज
 position स्थिति
 positive धन
 power घात
 principle प्रनियम
 problem निर्मेय
 product गुणनफल
 progression श्रेढी
 properties गुण (Mar. गुणधर्म)
 proportional अनुपाती
 provided that अथ यदि
 quadrant चरण
 quadratic equation वर्ग-
 समीकार, द्विघात-समीकार
 quadrilateral चतुर्भुज
 quantity राशि
 quotient भागफल
 radian 1 n. अर (from radius
 अर), संचापास्कोण n. (सं-
 equal + चाप arc + अर
 radius—an angle subtended
 by an arc equal
 in length to the radius)

2 adj शारीय
 radius vector नदिश त्रिज्या
 raise उन्नयन
 raised उद्धीत
 G raised to G उद्धीत
 G raised to the power G उघात
 ratio निरूपित
 real वास्तविक
 reciprocal व्युत्क्रम
 rectangle आयत
 regular नियमित
 relation संबंध
 represent निरूपण
 restriction निरध
 result फल
 revolution परिभ्रमण
 revolving line परिभ्रमण रेखा
 right angle शीकोण
 right hand side श्रिणपश
 root मूल
 rule नियम
 satisfy 1 (an equation) (ममी
 कर) समाधान
 2 (a condition) (प्रतिबध)
 पालन
 secant (sec) व्युत्क्रमकोटिज्या
 (व्युकोज्या)
 second काटिका
 section छेद

section of a sphere गोलीय-
 छेद
 sector शकल
 sector of a circle वृत्त शकल
 segment खण्ड
 semiperimeter सानिपरिमाप
 series श्रेणी
 sexagesimal पाष्टिर
 sextant षष्टक
 side 1 (of a solid) पार्श्व
 2 (of an equation) पक्ष
 3 (of a triangle) भुज
 similar समरूप
 simplify सरलन
 sine (sin) ज्या
 size परिमाण
 solution (result) फल
 solution of a triangle त्रिभुज
 निर्धारण
 sphere गोल
 square 1 (power) पाँ
 2 (figure) सनायत
 square root वर्गमूल
 squaring द्विघातन
 squaring and adding वर्ग-
 योग करणे
 standard प्रमाण
 submultiple अपवर्तक
 substitution आदेश
 subtend आपातन

subtraction वियोग
 suffix पादांक
 sum योग
 supplementary angle अन्त-
 र्ग कोण
 symbol प्रतीक
 system पद्धति
 table सारणी
 tangent (tan) स्पर्शज्या, स्पर्ज्या
 (रप)
 tangent (line) स्पर्शिका, स्पर्शरेखा
 tendency प्रवृत्ति
 theodolite त्रिकोणमापक
 theorem प्रमेय
 theory सिद्धान्त
 throughout साधत
 trace अनुरेखन

traced out अनुरेखित
 trigonometry त्रिकोणमिति
 trigonometrical त्रिकोणमितीय
 uniform 1 एकसूत्र
 2 (homogeneous) समांग
 unit एकक
 unknown अज्ञात
 verify सत्यापन
 versed sine उष्कमज्या, (उज्ज्या)
 vertical उदग्र

Symbols

— प्था

Lt. (limit) सी (सीमा)

log (logarithm) छे (छेदा)
 ' (dash) ' (प्राप)

पारिभाषिक शब्दावलि

मराठी-आंग्ल

अश numerator	अंतर्लम्बन inscribe
अश degree	अन्वृत्त incircle
अशक grade	अंतरिक्ष्या inradius
अशत partly	अन्तिम final
अक्षवृत्त latitude	अन्यथा aliter (otherwise)
अचल constant	अपर्यक्त submultiple
अज्ञात unknown	अपर्यंत multiple
अत्यणु infinitesimal	अयुग्म odd
अथ यदि provided that	अर्हो value
अधिकोण obtuse angle	अल्पिष्ठ least
अनन्त infinite	अवनति-कोण angle of depression
अनन्त श्रेणी infinite series	
अनन्ती infinity	अवयव element
अनियत indefinitely	अष्टकोण, अष्टभुज octagon
अनुकूल integral	असमता inequality
अनुच्छेद article	आदि, आदिन initial
अनुपाती proportional	आदिन स्थिति initial position
अनुरम्पण trace	आदि-रेखा initial line
अनुरक्षित traced out	आदेश substitution
अत केंद्र incentre	आधार base
अत कोण internal angle	आन्तर अर्धक internal bisector
अवर्गित included	आपातन subtend

आयत rectangle	काल्पनिक imaginary
आयाम length	काष्ठिका second
आर (from ध्रर), संचापास-कोण radian n	केन्द्र centre
आरीय radian <i>adj</i>	कोटिज्या (कोज्या) cosine (coa)
आनतः, आरतन्त्राल period	कोटिस्पर्शज्या, कोटिस्पर्ज्या (कोस्प) cotangent (cot)
आवर्तीय periodic	कोणबिंदु angular points
उन्नय altitude	कोण मापन measurement of angles
उत्क्रमकोटिज्या (उत्को) covered sine	कोशक mile
उत्क्रमज्या (उज्या) versed sine	क्षेत्रफल area
उदग्र vertical	क्षैतिज horizontal
उन्नति कोण angle of elevation	खंड segment
उन्नयन raise	गणना calculation
उधीत raised	गतिहीन motionless, at rest
६ उन्नीय ७ ८ raised to 5	गुण properties
उपपन्न approximate (brought together)	गुणनफल product
उपमादित approximate	गुणोत्तर श्रृंखला geometrical pro gression
उपसाध्य corollary	गोल sphere
उभय-साधारण common to both	गोलीय खंड section of a sphere
आहुत कोण supplementary angle	ग्रह्य a largeable
ऋण negative	घड़ीवत् clockwise
एकक unit	घात power
ऐक्य identical	६ घात ५ ६ raised to the power 5
ऐक्यत्व identity	घातक index of the power
कर्ण hypotenuse	चकित cyclic
कला minute	चतुर्भुज quadrilateral
	चरण quadrant
	चर variable

चाप arc	निर्धारण solution (of a tri- angle)
छेद section	निर्मेय problem
छेदा logarithm	निष्पत्ति ratio
ज्या sine (sin)	न्यास, पक्ष data
तदनुसार according as	न्यून कोण acute angle
त्रिकोणमिति trigonometry	पक्ष side of an equation
त्रिकोणमितीय trigonometrical	पञ्चभुज, पञ्चकोण pentagon
दक्षिण पक्ष right hand side	पदसहति expression
दत्त given	पदिक pedal
दशच्छेदा पद्धति, साधारण छेदा- पद्धति common system of logarithms	पद्धति system
दशभुज, दशकोण decagon	परिषेड circumcentro
दशमिक decimal	परिश्रिज्या circumradius
दशमिकांश mantissa	परिभाषा definition
दशा, प्रकार case	परिभ्रमण revolution
द्विघातन squaring	परिभ्रमण रेखा revolving line
द्विघात समीकार quadratic equation	परिमाण size
द्विसमत्रिभुज isosceles triangle	परिमाण perimeter
धन positive	परिमित finite
ध्रुव pole	परिलेखन circumscribe
ध्रुववृत्त meridian	परिवर्तन convert
नति inclination	परिवृत्त circumcircle
निदर्शनात्मक illustrative	पाद foot
निबध restriction	पादाक suffix
नियम law	पार्श्व side of a solid
नियमित regular	पालन (प्रतिबध) satisfy (a condition)
निरूपण represent	पूर्णांक integer
	प्रचय common difference
	प्रतिघटीयत् anticlockwise

प्रतिच्छेदा antilogarithm	मर्यादा-चाप bounding arc
प्रतिबंध condition	मर्यादा रेखा bounding line
प्रतीक symbol	महत्ता magnitude
प्रतीप inverse	मान value
प्रनियम principle	माप measure
प्रमाण standard	मिथरछेदन, छेदन intersect
प्रमेय theorem	मूलबिंदु origin
प्रवृत्ति tendency	मूलमूल fundamental
प्राकृत natural	मूल root
प्रांगुल inch	सधार्थ exact
फल result, solution	यष्टि yard
बहिर्लिखित escribed	योग sum, addition
बहिर्लेखन escribe	योग प्रमेय addition theorem
बहिर्लृप्त excircle	राशि quantity
बहिर्वर्द्ध excentre	रैखिकी geometry
बहिर्व्कोण exterior angle	लक्षण characteristic
बहिर्दिग्ज्या exradius	लंब perpendicular
बहुभुज polygon	लंबकेंद्र orthocentre
बाह्य अर्धक external bisector	लंबकोण right angle
बाह्यत' externally	लंबपर complementary
चित्ररेख graph	वक्र curve
बिन्दु di-c	वर्ग square (quantity)
योजनगणित algebra	वर्गमूल square root
यैज्ञिकरीत्या algebraically	वर्गयोग करणे squaring and
भागराज्य quotient	adding
भाजन division	वर्ग समीकार quadratic 'equa-
भिन्न fraction	tion
भुज side of a triangle	वर्तुल circular
मध्यक mean	वर्तुल माप circular measure
मध्यमा median	वस्तु object

वाम पक्ष left hand side
 वास्तविक real
 विकर्ण diagonal
 विक्षोभमान theodolite
 विचरण variation
 वियुत minus
 वियोग subtraction
 विश्रामस्थ at rest
 विषम odd
 विस्तार expansion
 वृत्त circle
 वृत्त शर्ल sector of a circle
 वृत्तीय cyclic
 वैकल्पिक alternative
 व्यक्त करणे express
 व्यञ्जक expression
 व्यत्यासत conversely
 व्यास diameter
 व्युत्क्रम reciprocal
 व्युत्क्रमकोटिज्या, व्युत्कोज्या
 (व्युत्को) secant (sec)
 व्युत्क्रमज्या (व्युत्कोज्या) cosecant
 (cosec)
 शर्ल sector
 शतिक centesimal
 शतिमान centimetre
 शिरोद्वन्द्व bar
 शिरोबिन्दु vertex
 शून्य zero
 श्रित function

श्रेढी progression
 षड्भुज, षट्कोण hexagon
 षण्चक sextant
 षाष्टिक sexagesimal
 मेलन adjacent
 मवादी corresponding
 सट्टचीय concyclic
 सस्पर्श बिन्दु point of contact
 सकेतना notation
 संख्यात्मक numerical
 सचापार-कोण radian
 सतत continuous
 सत्यापन verify
 मदिश त्रिज्या radius vector
 सदिग्धता ambiguity
 सम even
 समतल plane
 समत्रिभुज equilateral tri-
 angle
 समरूप similar
 समाग uniform (homogene-
 ous)
 समाधान satisfy (an equa-
 tion)
 समांतर parallel
 समांतर श्रेढी arithmetic
 progression
 सनायन square (figure)
 समीकार equation
 सपतन coincide

सपतनः सपान coincidence
 सपाती coincident
 सत्रधे relation
 सरलन simplify
 सर्वांगसम congruent
 साद्यत throughout
 साधनः प्ररन-साधन solution
 साधारण common
 सामान्य general
 सामान्य छेदा पद्धति common
 system of logarithms
 सामान्यतम most general
 सामिपरिमाप semiperimeter

सारणी table
 सार्थक significant
 सिद्धान्त theory
 सीमा limit
 सीमान्ती in the limit
 सीमित bounded
 सूत्र formula
 स्थिति position
 स्थिर fixed
 स्थिराक constant
 स्पर्श्या (स्पर्) tangent (tan)
 स्पर्शरम्भा tangent (line)
 हर denominator
 हरात्मक मध्यक harmonic mean

छेदा-प्रतिच्छेदा-सारणी

બેદા સારાઈ (logarithmic tables)

[illegible]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

੦	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯	੧੦	੧੧	੧੨	੧੩	੧੪	੧੫	੧੬	੧੭	੧੮	੧੯	੨੦
੦੦	੦੦੦	੨੦੦੦	੪੦੦੦	੬੦੦੦	੮੦੦੦	੧੦੦੦੦	੧੨੦੦੦	੧੪੦੦੦	੧੬੦੦੦	੧੮੦੦੦	੨੦੦੦੦	੨੨੦੦੦	੨੪੦੦੦	੨੬੦੦੦	੨੮੦੦੦	੩੦੦੦੦	੩੨੦੦੦	੩੪੦੦੦	੩੬੦੦੦	੩੮੦੦੦
੧੦	੧੦੦	੨੦੦੦	੪੦੦੦	੬੦੦੦	੮੦੦੦	੧੦੦੦੦	੧੨੦੦੦	੧੪੦੦੦	੧੬੦੦੦	੧੮੦੦੦	੨੦੦੦੦	੨੨੦੦੦	੨੪੦੦੦	੨੬੦੦੦	੨੮੦੦੦	੩੦੦੦੦	੩੨੦੦੦	੩੪੦੦੦	੩੬੦੦੦	੩੮੦੦੦
੨੦	੨੦੦	੪੦੦੦	੬੦੦੦	੮੦੦੦	੧੦੦੦੦	੧੨੦੦੦	੧੪੦੦੦	੧੬੦੦੦	੧੮੦੦੦	੨੦੦੦੦	੨੨੦੦੦	੨੪੦੦੦	੨੬੦੦੦	੨੮੦੦੦	੩੦੦੦੦	੩੨੦੦੦	੩੪੦੦੦	੩੬੦੦੦	੩੮੦੦੦	੪੦੦੦੦
੩੦	੩੦੦	੬੦੦੦	੯੦੦੦	੧੨੦੦੦	੧੫੦੦੦	੧੮੦੦੦	੨੧੦੦੦	੨੪੦੦੦	੨੭੦੦੦	੩੦੦੦੦	੩੩੦੦੦	੩੬੦੦੦	੩੯੦੦੦	੪੨੦੦੦	੪੫੦੦੦	੪੮੦੦੦	੫੧੦੦੦	੫੪੦੦੦	੫੭੦੦੦	੬੦੦੦੦
੪੦	੪੦੦	੮੦੦੦	੧੨੦੦੦	੧੬੦੦੦	੨੦੦੦੦	੨੪੦੦੦	੨੮੦੦੦	੩੨੦੦੦	੩੬੦੦੦	੪੦੦੦੦	੪੪੦੦੦	੪੮੦੦੦	੫੨੦੦੦	੫੬੦੦੦	੬੦੦੦੦	੬੪੦੦੦	੬੮੦੦੦	੭੨੦੦੦	੭੬੦੦੦	੮੦੦੦੦
੫੦	੫੦੦	੧੦੦੦੦	੧੫੦੦੦	੨੦੦੦੦	੨੫੦੦੦	੩੦੦੦੦	੩੫੦੦੦	੪੦੦੦੦	੪੫੦੦੦	੫੦੦੦੦	੫੫੦੦੦	੬੦੦੦੦	੬੫੦੦੦	੭੦੦੦੦	੭੫੦੦੦	੮੦੦੦੦	੮੫੦੦੦	੯੦੦੦੦	੯੫੦੦੦	੧੦੦੦੦੦
੬੦	੬੦੦	੧੨੦੦੦	੧੮੦੦੦	੨੪੦੦੦	੩੦੦੦੦	੩੬੦੦੦	੪੨੦੦੦	੪੮੦੦੦	੫੪੦੦੦	੬੦੦੦੦	੬੬੦੦੦	੭੨੦੦੦	੭੮੦੦੦	੮੪੦੦੦	੯੦੦੦੦	੯੬੦੦੦	੧੦੨੦੦੦	੧੦੮੦੦੦	੧੧੪੦੦੦	੧੨੦੦੦੦
੭੦	੭੦੦	੧੪੦੦੦	੨੧੦੦੦	੨੮੦੦੦	੩੫੦੦੦	੪੨੦੦੦	੪੯੦੦੦	੫੬੦੦੦	੬੩੦੦੦	੭੦੦੦੦	੭੭੦੦੦	੮੪੦੦੦	੯੧੦੦੦	੯੮੦੦੦	੧੦੫੦੦੦	੧੧੨੦੦੦	੧੧੯੦੦੦	੧੨੬੦੦੦	੧੩੩੦੦੦	੧੪੦੦੦੦
੮੦	੮੦੦	੧੬੦੦੦	੨੪੦੦੦	੩੨੦੦੦	੪੦੦੦੦	੪੮੦੦੦	੫੬੦੦੦	੬੪੦੦੦	੭੨੦੦੦	੮੦੦੦੦	੮੮੦੦੦	੯੬੦੦੦	੧੦੪੦੦੦	੧੧੨੦੦੦	੧੨੦੦੦੦	੧੨੮੦੦੦	੧੩੬੦੦੦	੧੪੪੦੦੦	੧੫੨੦੦੦	੧੬੦੦੦੦
੯੦	੯੦੦	੧੮੦੦੦	੨੭੦੦੦	੩੬੦੦੦	੪੬੦੦੦	੫੬੦੦੦	੬੬੦੦੦	੭੬੦੦੦	੮੬੦੦੦	੯੬੦੦੦	੧੦੬੦੦੦	੧੧੬੦੦੦	੧੨੬੦੦੦	੧੩੬੦੦੦	੧੪੬੦੦੦	੧੫੬੦੦੦	੧੬੬੦੦੦	੧੭੬੦੦੦	੧੮੬੦੦੦	੧੯੬੦੦੦

[illegible]

शुद्धिपत्र

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
२८	११	व, म, म,	व, म, म
२८	१५	वम मम	भव मम
३१	६	$\frac{(१ + कोट्या अ)}{(१ + कोट्या अ)स्प अ}$	$\frac{(१ + दोज्या अ)}{(१ + त्या अ)स्प अ}$
८०		पहिल्या आठवीत मय रेणुसालील त्रिकोणाचा शिरोबिंदु म पडला आहे. म च्या जागी व'चावावा	
८०	७	ममय'	ममय'
१११	१०	कोट्या न रा)	कोट्या (क - रा)
१५१	२	अवर्तन	अवर्तन
१००	२	दय	दय
१५३	८	यगमूळ	योगमूळ
१७७	८	$\frac{२}{१ + प'}$	$\frac{२ प}{१ + प'}$
१७७	१०	$प = अ स्प \frac{अ}{२}$	$प = स्प \frac{अ}{२}$
१८१	१२	-१ सा कोट्या म	-२ सा कोट्या म

પૃષ્ઠ	બોલ	અનુદ્ય	શુદ્ધ
૨૩૯	૧	ઝ _૧ ઝ _૩ , ઝ _૩ ઝ _૧ , ઝ _૧ ઝ _૨	ઝ _૨ ઝ _૩ , ઝ _૩ ઝ _૧ , ઝ _૧ ઝ _૨
૨૪૨	૯	ઉદ્ધાયન	ઉદ્ધયન
૨૪૬	૧	છેદ	છેદા
૨૬૦	૯	યા સમાન	યાસમાન
૨૬૦	૧૯	લક્ષણ	લક્ષર્ણ
૨૬૧	૧૨	+ ૨૦૮૨૮	૧ + ૨૦૮૨૮
૨૭૦	૧૪	૭૨૬૩	૭૨૩૬
૨૭૦	૧૮	૭૨૨૫	૭૨૩૫
૨૮૯	૧૫	૧૦૨°૩૬'	૧૦૨°૩૬'
૩૧૮	૧૯	∠ ગમ્યક	∠ ગમ્ય
૩૩૬	૧૧	દ્વ ^૨ + ૨ દ્વ ^૨ + ૧દ્વ ^૨	દ્વ ^૨ + ૨ દ્વ ^૨ + ૨ દ્વ ^૨